

信号处理的数学方法
aka 数字信号与图像处理
Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

May 2, 2012

回顾

- ▶ 连续信号, 连续时间系统: 傅立叶分析与函数空间
模拟信号处理: 逼近理想滤波器(Butterworth滤波器)
- ▶ 离散信号, 离散时间系统: Z变换 与 复级数
数字信号处理: 构造 $h(n)$, 使得 $H(e^{j\omega})$ 逼近理想滤波器(等波纹滤波器)
- ▶ 有限信号, 矩阵变换: 矩阵基变换 \rightarrow 稀疏矩阵
信号的传递与压缩: 寻找合适信号的合适的基? 小波基。稀疏信号

Chapter 5: 有限信号: 算法与应用 Finite signals: algorithms and applications

离散傅立叶变换
DFT
FFT
离散余弦变换

小波变换
Harr小波
滤波器组的构造
小波基和稀疏表示

最小二乘与统计滤波器的实现
最小二乘
最小二乘的递推算法举例
维纳滤波器的Levinson算法

参考书: 数字信号与图像处理: 第四章
G.Strang: Computational Science and engineering:

从离散信号到有限信号

实际应用中必然是有限的抽样信号; $x(t) \rightarrow x(n) \rightarrow x[M]$

- ▶ 得到有限信号的方法: 截断。
时间域: $x[M] = x(n) \cdot G(N)$, 其中 $G(N)$ 为长为 N 的矩形脉冲。
频率域: $X_N(\omega) = X(\omega) * \text{sinc}(\omega)$;
- ▶ 问题: 卷积产生频率泄漏。
有限信号的频率谱是无穷的!

从有限信号得到离散谱

- ▶ 周期延拓的信号 \rightarrow 离散谱
- ▶ 加零后周期延拓;
- ▶ 对称扩张后周期延拓;

离散傅立叶变换DFT

- ▶ 有限序列 $x[n]$, 傅立叶谱 $X[k]$, 频率 $W_N = e^{-i2\pi/N}$;
- ▶ 离散傅立叶变换(DFT) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$, $k \in [0, N-1)$
- ▶ 离散傅立叶逆变换(IDFT) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$
- ▶ 矩阵表示:

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

- ▶ 变换公式 $X = D_N x$, 逆变换 $x = \frac{1}{N} D_N^* X$. 矩阵是Vandemonde矩阵!

DFT的计算

计算复杂度:

- ▶ 计算所有变换样本要 N^2 个复数乘法, $N(N-1)$ 复数加法。即 $4N^2$ 个实数乘法, $(4N-2)N$ 实数加法;
- ▶ ***计算一个变换样本(常用Goertzel算法:)(线性滤波器方法)
利用 $W_N^{-kN} = 1$, DFT可以写成序列的卷积;
 $X[k] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] W_N^{kl} = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] W_N^{-k(N-l)}$
 $X[k] = y_k[n]|_{n=N}, y_k[n] = \sum_{l=0}^n x[l] W_N^{-k(n-l)}, x_e[n] = x[n], h_k[n] = W_N^{-kn}$ 计算
算 $y_k[n] = x_e[n] \otimes h_k[n]$, 即 $Y_k(Z) = \frac{X_e(Z)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$;
递推公式: $y_k[n] = x[n] + W_N^{-k} y_k[n-1], 0 \leq n \leq N$
算法复杂度: $2N$ 个实乘法, $2N$ 个实加法; $X[k], X[n-k]$ 的对称性;

DFT性质

- ▶ 傅立叶谱 $X[k]$ 是离散的周期谱。(是单位圆上的 N 点抽样)
 N 的选取问题: $x(N)$ 的 N 点DFT与 $x(N)$ 加零后 $2N$ 点DFT差别? 一般依赖与信号的短时平稳性。
- ▶ 对称与共轭: $W_N^k = -W_N^{N/2+k}, W_N^N = 1$
特别实序列有: $X[N-k] = X[k]^*$
- ▶ 周期(或循环)卷积: $x[n] * y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(N-i)$
- ▶ Parseval 等式。

DFT矩阵

DFT矩阵:

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

MATLAB实现 $j = 0 : N-1; k = j'; F = w. \wedge (k * j)$
 $D = \text{fft}(\text{eye}(N));$

- ▶ 矩阵的列向量是正交的! 为什么? 是某个对称矩阵(二阶差分的)的特征向量! 参见DCT部分
- ▶ 例子: $D_4(\delta) = (1, 1, 1, 1), D_4(DC) = \delta$
 $D_4(\sin) = (0, 1/2i, 0, -1/2i)$. 离散余弦变换DCT是实变换!

DFT矩阵分解

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & i & \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & i^2 & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

一般的 $F_{2N} = \begin{bmatrix} I_N & A_N \\ I_N & -A_N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_N & \\ & F_N \end{bmatrix} * [\text{even-odd permutation}]$

其中 A_N 是对角阵 $(1, w, w^2, \dots, w^N)$.

计算量: 只有 N 次对角阵计算!!! 递推有 $cN \log N$ 次运算!

注: 每个矩阵是稀疏矩阵!

FFT的实现

- ▶ 设信号为 c_k , 分解为奇偶 c_k^1, c_k^2
- ▶ 变换有 $f^1 = D_N c^1, f^2 = D_N c^2$;
- ▶ 则计算有 $f_j = f_j^1 + w^j f_j^2, 0 \leq j \leq N-1$
 $f_j = f_j^1 - w^j f_j^2, N \leq j \leq 2N-1$

MATLAB实现

$$f^1 = \text{fft}(c(0 : 2 : 2N - 2)) * N;$$

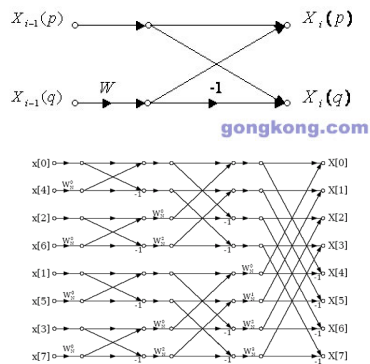
$$f^2 = \text{fft}(c(1 : 2 : 2N - 1)) * N;$$

$$A = w.^{\wedge}(0 : N - 1)';$$

$$f = [f^1 + A .* f^2, f^1 - A .* f^2].$$

例子: D_{1024} 的分解。

不同形式的FFT



- ▶ DIT 按时间抽
取: $X[k] = P(k/2) + W_N^k S(k/2)$
Cooley-Turkey 算法(1965),
Gauss(1805);
注意: 输出的信号顺序即二进制表示的逆序!
- ▶ DIF 按频率抽取 $X[2k] = \sum(x(j) + x(j + N/2)) W^{jk}$; $X[2k+1] = \sum(x(j) - x(j + N/2)) W^{jk}$
- ▶ 基4的算法, 可以不用乘法!
- ▶ FFTW: 参见网站;
- ▶ 应用: 卷积计算(多项式计算);

有限信号与矩阵

FIR系统的矩阵

- ▶ 离散信号FIR系统: $y(n) = \sum_{k=1}^M x(n-k)h(k)$
矩阵表示: $\vec{y} = T\vec{x}$, T 是 Toeplitz 矩阵。
(常对角线矩阵)

- ▶ 周期延拓信号:(DFT) Toeplitz 矩阵 \rightarrow 循环矩阵
- ▶ 加零: 边界频率泄漏?
- ▶ 对称延拓: DCT Toeplitz 矩阵 \rightarrow 特别的对称矩阵

傅立叶变换:

- ▶ 傅立叶变换矩阵 $D_N = (w^{jk})_{N \times N}$, $w = e^{-i2\pi/N}$
记 $v_k = (w^{0k}, w^{1k}, \dots, w^{(N-1)k})$. 则 v_k 为一组正交基;
 D_N 即基变换;
- ▶ 最重要特性: v_k 为所有 Toeplitz 矩阵的特征向量。
- ▶ 有限信号 $D_N \vec{y} = D_N T \vec{x} = \Lambda D_N \vec{x}$

二阶差分矩阵的特征向量

▶ 二阶差分矩阵 $A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 傅立叶矩阵

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}$$

▶ B 的特征根: 0, 0.5, 1, 0.5, 即FIR系数的傅立叶变换 $h = (2/4, -1/4, 0, -1/4)$

$$Y = HX$$

▶ 二阶平均矩阵 $B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

注意: 有相同的特征向量和相同的特征值!(但顺序不同)

寻找实系数的傅立叶变换?

历史:

- ▶ 连续信号: 实的偶函数的傅立叶变换是实系数的(余弦变换);
- ▶ 离散信号: 直到1974: Rao发现 DCT2 (用于逼近Karhunen-Loeve基, 信号压缩)
- ▶ 1985 Wang给出8种DCT形式;
- ▶ 注记: 离散问题比连续问题有更多的复杂性(边界条件)

傅立叶变换矩阵作为差分矩阵的特征向量矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- ▶ v_k 是特征向量, 特征值 $\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{N}$
- ▶ 特别: A_0 是实对称矩阵, 不同特征向量是正交, 可以选取为实特征向量。注意 $\lambda_k = \lambda_{N-k}$.
- ▶ $c_k = \text{Re}(v_k) = (1, \cos \frac{2k\pi}{N}, \dots, \cos \frac{2(N-1)k\pi}{N});$
- ▶ $s_k = \text{Im}(v_k) = (1, \sin \frac{2k\pi}{N}, \dots, \sin \frac{2(N-1)k\pi}{N});$
- ▶ 不足: c_k 的长度不一样。 $c_0, c_{N/2}$ 是 \sqrt{N} , 其他是 $\sqrt{N/2}$!

有限信号的边界条件

连续信号的边界条件:

- ▶ 连续信号 $[0, \pi]$ 做偶延拓; 微分方程: $u'' = -u$,
- ▶ 零点边界条件: Neumann 条件 $u'(0) = 0$
- ▶ π 点边界条件对应不同特征函数(特征值);
Neumann 条件 $u'(\pi) = 0 \rightarrow \cos kx$
或Dirichlet条件 $u(\pi) = 0 \rightarrow \cos(k + 1/2)x$

有限信号的边界条件:

- ▶ 差分方程: $A_0 v = -v$
- ▶ 离散对称延拓: 全样本延拓(meshpoint) u_1, u_0, u_1
半样本延拓(midpoint) u_1, u_0, u_1
- ▶ 两种边界条件, 两种延拓, 两个端点一共有8种DCT变换;
一般: 取两端点的延拓方式一样, 有DCT1-4;
不一样有DCT5-8;(称为odd DCT)不常用;

离散余弦变换的差分矩阵DCT2

$$A_0 = \begin{bmatrix} * & * & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & ** & ** \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ 零点取midpoint延拓; $u_{-1} = u_0$
矩阵第一行为 $(1 - 1\dots)$;
- ▶ 零点取meshpoint延拓; $u_{-1} = u_1$
矩阵第一行为 $(2 - 2\dots)$;
- ▶ π 点取Neumann条件; 最后一行同上两种可能;
- ▶ π 点取Dirichlet条件; 取midpoint延拓; $u_N = u_{N-1}$;
矩阵最后一行: $(\dots - 13)$;
- ▶ π 点取Dirichlet条件; 取meshpoint延拓; $u_N = 0$;
矩阵最后一行: $(\dots - 12)$;

特别DCT2: 两端都取midpoint和Neumann条件!

离散余弦变换矩阵DCT2

DCT2

- ▶ 特征向量:
 $c_k = (\cos(1/2)k\pi/N, \cos(1/2)k\pi/N, \dots, \cos(N-1/2)k\pi/N)$;
特征值: $2 - 2\cos(k+1/2)\pi/N$;
- ▶ DCT2矩阵元 $(\frac{1}{\sqrt{N}} \cos(j+1/2)k\pi/N), 0 \leq j, k \leq N-1$.
特别是它是正交矩阵!
- ▶ 称其中心(延拓)为 $-1/2, N-1/2$, 长度为 N
- ▶ 计算: 可以用FFT实现;
- ▶ 应用: JPEG压缩; 选取 8×8 图像块, 得到DCT2系数; 压缩(传递), IDCT恢复;
对于有相关性的信号有很好的压缩功能!

寻找更好的基变换?

选取基的主要要求:

- ▶ 计算速度: FFT, FWT
- ▶ 精确逼近: sparse 稀疏信号
- ▶ 正交性: $F^{-1} = (F^T)^*$ 可以没有!

重要例子:

- ▶ 连续光滑信号: 傅立叶基, 问题: Gibbs现象!
- ▶ 有间断点的信号(图像): 小波基
- ▶ 有限元方法: 分段线性多项式;
- ▶ 样条逼近: 分段光滑多项式;
- ▶ 其他基: 微分方程求解 Bessel函数, ...

离散余弦变换矩阵及其他

- ▶ DCT1,3要做正交化(特征向量长度不一样), DCT4可以;
- ▶ DCT5-8的基向量"长度"为 $N \pm 1/2$ 不方便计算; (可以对称扩充)
- ▶ 推广: Malvar的Modulated-lapped变换: 构造相交的覆盖图像块用于图像变换; Dolby AC-3. 可用DCT4, 8;
- ▶ 注记: 取不同的差分矩阵, 利用特征向量可以得到新的矩阵, 可能有新的更好的基变换?
- ▶ 基选取依赖于: 数学, 计算, 和信号
视觉信号与小波基的选取是自然的, 人眼看到的是小波!!!

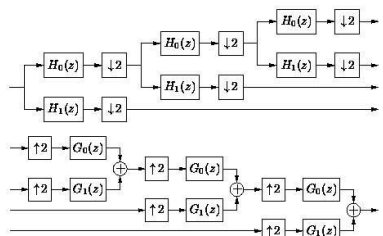
Harr小波

- ▶ 信号: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 4, 5, 1)$
- ▶ 低通滤波器: 移动平均 $y = (x_1 + x_2)/2, (x_3 + x_4)/2$
- ▶ 高通滤波器: 移动差分 $z = (-x_1 + x_2)/2, (-x_3 + x_4)/2$
- ▶ 恢复信号: $y, z \rightarrow x$
- ▶ 可迭代应用滤波器: $yy = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4,$
 $zy = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4$; 再恢复信号;
- ▶ 可压缩信号!

小波变换

- ▶ 信号: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
- ▶ 低通滤波器+降抽样: $y = (5, 3)$
- ▶ 高通滤波器+降抽样: $z = (-1, -2)$
- ▶ 迭代应用滤波器+降抽样: $yy = 4, zy = 1$;
- ▶ 得到小波系数 $(4, -1, -1, -2)$
- ▶ 恢复矩阵:

滤波器组与小波变换



$$H = \begin{bmatrix} * & * & & & \\ h_0(0) & h_0(1) & * & & \\ & h_0(0) & h_0(1) & * & \\ h_1(0) & h_1(1) & * & & \\ & h_1(0) & h_1(1) & * & \\ * & * & & & \end{bmatrix}$$

- ▶ 信号 → (两通道)解析滤波器组 → 小波系数 (高通滤波器的结果)
小波系数 → 合成滤波器组 → 恢复原信号。
- ▶ 矩阵变换:(其中 h_0, h_1 为FIR滤波器系数) $Hx = y$
- ▶ 快速小波变换FWT: 迭代应用解析滤波器, 注意 $H_{1/2}$ 作用在一半长度的信号上。 $\dots H_{1/4} \cdot H_{1/2} \cdot Hx = y$
乘法次数: 达到快速算法的HolyGrail!
($LN + L * N/2 + L * N/4 + \dots$) = $2LN = O(N)$, 其中 L 为滤波器长度, N 为信号长度。
- ▶ 类似合成滤波器组可得逆小波变换!

条件PR: 构造离散小波基

Daubechies: 双正交, 存在 $\tilde{W} \cdot W = Id$.

设解析滤波器组 h_0, h_1 , 合成滤波器组 f_0, f_1 .

条件PR: $F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-l}$

$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$

- ▶ 因果系统的完全重构等价于频率响应是一个 l 阶延迟, 见方程一。Harr小波延迟为1。
- ▶ 上下抽样产生混叠频率 $w + \pi$, 必须消去等价于方程二。 $e^{i(w+\pi)} = -e^{iw}$
- ▶ 简单选取: $F_0(z) = H_1(-z), F_1(z) = -H_0(-z)$, 定义乘积低通滤波器 $P_0(z) = F_0(z)H_0(z)$, 等价条件: $P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-l}$.
特别: $P_0(z)$ 的多项式的奇数阶系数除 z^{-l} 外都为零。
- ▶ 正规化滤波器(half-band) $P(z) = z^l P_0(z)$, PR条件为 $P(z) + P(-z) = 2$

例子: 5/3滤波器, $h_0 = (-1, 2, 6, 2, -1)/8, f_0 = (1, 2, 1)/2$
 $h_1 = (1, 2, 1)/4, f_1 = (1, 2, -6, 2, 1)/4$.

从Harr小波到其他

从有限矩阵到无穷滤波器

- ▶ Harr小波来源于 DFT_2 , 注意一般的有Walsh变换(矩阵元素全为1, -1)。
- ▶ Harr小波需要用低通, 高通滤波器(无穷维)和上下抽样运算;
- ▶ 信号的边界需要扩张(对称, 加零, 周期);

Proposition (上下抽样的频率响应)

$$(\downarrow 2)(e^{iwn}) = \frac{1}{2}(e^{iwn/2} + e^{i(w/2+\pi)n}), (\uparrow 2)(e^{iwn}) = e^{i2wn}$$

$$\text{特别 } (\uparrow 2)(\downarrow 2)(e^{iwn}) = \frac{1}{2}(e^{iwn} + e^{i(w+\pi)n})$$

附: 小波常用对称扩张, 特别信号的扩张方式(奇或偶扩张)与低通滤波器的对称性一致!

Harr小波是唯一对称, 正交小波。

滤波器设计例子

滤波器组设计: 选取 $P_0(z)$, 选取 H_0 . 得到 H_1, F_0, F_1 .

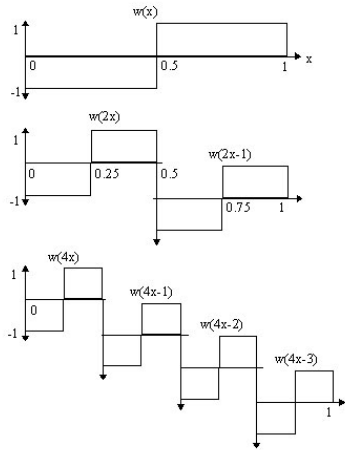
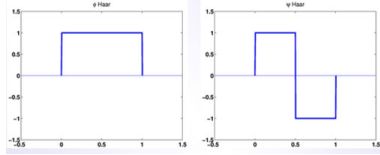
EXAMPLE (maxflat 滤波器)

乘积滤波器 $P_0(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6})$ 6个零点: 4阶 $z = -1$, 及 $c = 2 + \sqrt{3}, 1/c$

- ▶ 2/6滤波器或(6/2): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})/z, \frac{1}{2}(1, 1), \frac{1}{8}(-1, 1, 8, 8, 1, -1)$
- ▶ 3/5滤波器或(5/3): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})^2/z^2, \frac{1}{4}(1, 2, 1), \frac{1}{4}(-1, 2, 6, 2, -1)$
- ▶ 4/4正交滤波器(Daubechies): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})^2(c - z^{-1})/z^3, \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}), \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

注意: 一般取 H_0 系数和为1, F_0 的系数和为2. 常用5/3, 6/2滤波器。特别JPEG2000使用9/7, 5/3滤波器。

傅立叶变换VS 小波变换



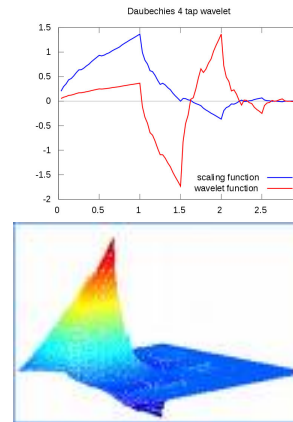
- ▶ 连续信号: 傅立叶基 $\cos t, \sin t \rightarrow w(t), \phi(t)$
- ▶ 傅立叶变换: 时间到频率域, 小波变换: 时间域到 多尺度分解(局部时频信号)
- ▶ Harr小波:(解见图像)
 - 平均: $\Phi(t) = \Phi(2t) + \Phi(2t - 1)$
 - 细节: $w(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$
 - 迭代有: $w_{jk}(t) = 2^j w(2^j t - k)$
- ▶ 小波基的优点: 局部基, 可加细(refine), 快速, 有限逼近(!!). 有限元和样条函数仅实现前三条.

离散小波基的构造

利用 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi(2t - k)$, 构造 h_0 , 求解 $\phi(t)$,
 ***从而可得 h_1 , 以及合成滤波器组的低通, 高通滤波器 f_0, f_1 .
 基本问题:

1. 存在性: 尺度方程有解的充分条件(条件E)
泛函分析: 等价于 $\phi(t - k)$ 是一组稳定基(Riesz basis).
2. 精确逼近: 有限项逼近的充分条件(条件 A_p)
3. 完全重构(双正交基): 存在合成滤波器组 Perfect Reconstruction (条件PR)
4. (***) 正交基: 条件O

L^2 空间的小波基与尺度方程



- ▶ L^2 函数的小波分解:
 $f(t) = \sum a_k \phi(t - k) + \sum \sum b_{jk} w_{jk}(t)$
- ▶ 尺度方程(refinement equation)
 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi(2t - k)$
小波方程 $w(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_1(k) \phi(2t - k)$
注意: h_0, h_1 即滤波器系数!
- ▶ 尺度方程的解: 简单形式即B样条函数(Harr小波的复合) 一般连续形式的解很复杂, 见Daubechies 小波1D解和2D解。
- ▶ 小波空间的分解: $V_0 = \{\sum a_k \phi(t - k)\}$,
 $W_0 = \{\sum c_k w(t - k)\}$,
 $V_1 = \{\sum b_k \phi(2t - k)\}$.
尺度方程+小波方程 $\rightarrow V_0 + W_0 = V_1$,
依次有 $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_\infty = L_2$
- ▶ 一般用滤波器实现离散小波变换!

***条件E和条件 A_p

条件E: $T = 2(\downarrow 2)H_0H_0^T$ 的所有特征根 $\lambda < 1$, 除一个简单特征根为1

- ▶ Cascade算法: $\phi^{i+1}(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi^i(2t - k)$
 $\phi^0(t)$ 可取 $[0, 1]$ 上矩形波。定理: $\phi(t)$ 的紧致支集为 $[0, L]$. 参见作业中 cascade.m
- ▶ 例子: 收敛 $h_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \rightarrow$ hat函数
Daubechies: $h_0 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$
不收敛: $h_0 = (2/3, 1/3)$
- ▶ 必要条件: 频率响应 $H_0(\pi) = 0$, 过滤AC信号!

条件 A_p : $M = (\downarrow 2)2H$ 有 p 个特征根 $1, 1/2, \dots, (1/2)^{p-1}$.

- ▶ f 的 p 阶逼近: 任一 f 与其投影到小波空间 V_p 中像的误差充分小。
即 $|f(t) - \sum a_{jk} \phi_{jk}(t)| \leq C 2^{-jp} |f^{(p)}(t)|$
- ▶ 等价条件1: 频率响应 $H_0(z)$ 有一个 p 阶零点在 $z = e^{i\pi}$.
等价条件2: $\sum_{k=0}^L (-1)^k k^m h(k) = 0, m = 0, 1, \dots, p - 1$

Karl Poper: In search of a better world(basis)?

$f(t) \approx \sum c_k \phi_k(t)$: 针对不同信号怎样寻找合适的基?

- ▶ 线性变换: 选取前 N 个数: (使用傅立叶基或小波基)
- ▶ 非线性变换: 选取前 N 个最大的系数: 正交搜索(basis pursuit)
- ▶ 稀疏变换: 极小化能量 $\|f - \sum c_k \phi_k\| + \alpha \sum |c_k|$ (Lasso)
注意: 稀疏表示要求 l_0 范数小, 但用 l_1 范数更好算, 且Donoho等证明: 概率意义下, 用 l_1 范数找到的是正确的。
- ▶ 光滑表示: 极小化能量 $\|f - \sum c_k \phi_k\| + \alpha |\sum c_k \phi_k|_{TV}$
Total Variation 范数常用于图像处理。

应用线性代数的矩阵分解

线性代数基本问题: $Ax = b$ 求解, $Ax = \lambda x$ 求特征根。

快速算法的基础:矩阵分解

- ▶ $A = LU$: 下三角矩阵和上三角矩阵的乘积:
高斯消去法 $(L, U) = lu(A)$;
- ▶ $A = QR$ 正交矩阵和上三角矩阵的乘积;
Gram-schmidt正交化:
Household 变换: $H = I - 2uu^T$ 是正交矩阵, 是以 u 为法向量的平面进行反射的矩阵变换。
一般MATLAB $qr(A)$ 用第二种(更稳定);
- ▶ $A = U\Sigma V^T$ SVD分解, U, V 正交矩阵,
设 $rank(A) = r, \Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$
注意: $A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i, A A^T u_i = \sigma_i^2 u_i, \sigma_i$ 称为奇异值。
Matlab: $svd(A), svd(A, 0)$ 。
特别有 $A = \sum u_i \sigma_i v_i^T$, 矩阵由若干向量的乘积完全决定,
称 u_i, v_i 为Karhunen-Leove 基(特别对称矩阵 $u_i = v_i$)。
可应用于PCA, 图像压缩等等(但速度慢!)

实用滤波器

- ▶ Wiener滤波器是理想滤波器。已知条件: 信号的二阶矩 R 以及信号与目标的相关系数 r_{dx} 。
- ▶ 最小二乘滤波器: 宽平稳过程, 已知 $x(n), d(n)$, 估计 R, r_{dx} 。
LS滤波器的法方程为 $\hat{R}\vec{C} = \vec{r}_d$, 最小能量 $E = E_y - \vec{r}_d^T C$ 。
其中 $\hat{R} = \vec{X}^T \vec{X}, \vec{r}_d = \vec{X}^T d$ 。
- ▶ 自适应滤波器: 非宽平稳过程, 已知 $x(n), d(n)$,
时变线性方程 $A_t w_t = D_t$, 能量(最小二乘) $E = |Aw - D|^2$,
一般可用迭代算法计算 $w_{t+1} = w_t - \Delta E$, 比如Newton方法。
自适应滤波器是学习过程, 收敛足够快, 从而可改变滤波器系数, 适应不同环境。
- ▶ Kalman滤波器: 非宽平稳过程, 时变线性方程 $D_t = A_t w_t + b$, 且有状态方程 $w_{t+1} = Fw_t + c$, 其中 b, c 是噪音或误差。
一般可用迭代算法: Kalman滤波器算法(比较繁琐, 略去). 与自适应滤波器存在对应。

以上算法的实现依赖于应用线性代数中的基本结果。

简单例子

EXAMPLE

估计一个信号的均值 μ , 已知信号 x_1, x_2, \dots, x_{99} , 可以定义

$\mu = \sum x_i / 99$, 新得到一个样本 x_{100} , 则新估计为 $\mu_{new} = \sum x_i / 100$

- ▶ 线性方程为 $A\mu = X$, 其中
 $A = (1, 1, \dots, 1)^T, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。
- ▶ 最小二乘解(伪逆); $A^T A \mu = A^T X, \mu = (A^T A)^{-1} A^T X$
特别这里 $A^T A = 99$. 验证估计是正确的;
- ▶ 希望不直接解方程, 利用old解得到新的解
 $\mu_{new} = \mu_{old} * 99/100 + x_{100} * 1/100$
!!! $\mu_{new} = \mu_{old} + 1/100(x_{100} - \mu_{old})$
1/100称为增益因子(gain factor), $(x_{100} - \mu_{old})$ 称为更新(innovation)!

一般的递推算法

EXAMPLE

设 $Ac = d$, 已知 $A_{old}c_{old} = d_{old}$, 增加新数据 A_{new}, d_{new} (一行). 可以得到 $c_{new} = c_{old} + (A^T A)^{-1} A_{new}^T (d_{new} - A_{new} c_{old})$.

- ▶ $A^T = [A_{old}^T \ A_{new}^T], D^T = [d_{old}^T \ d_{new}^T]$
- ▶ 最小二乘解(伪逆); $A^T A c = A^T D, c = (A^T A)^{-1} A^T D$
- ▶ 代入直接求解即可。
- ▶ $(A^T A)^{-1} A_{new}^T$ 称为增益因子(gain factor), 通常记为 K (Kalman), 一般是矩阵! $(d_{new} - A_{new} c_{old})$ 称为更新(innovation)!

Kalman 滤波器的简单例子

EXAMPLE

估计一个病人的心跳 u , 已知信号 x_1, x_2 , 可以定义 $u = \sum x_i / 2$, 如果有心跳随时间增加变慢即 $u_2 - u_1 = \alpha$, 则应该如何估计?

- ▶ 线性(时变)方程为 $A(u_1 \ u_2) = X$, 其中 $A = (1, 1)^T, X = (x_1, x_2)^T$.
- ▶ 增加有状态方程 $u_2 - u_1 = \alpha$,
- ▶ 组合三个方程, 得到新的线性方程组 $A_* u = X$ 最小二乘解(伪逆); $A_*^T A_* u = A_*^T X, u = (A_*^T A_*)^{-1} A_*^T X$ 可以直接求解 有 $u_2 = (x_1 + 2x_2 + \alpha) / 3, u_1 = (2x_1 + x_2 - \alpha)$.
- ▶ 递推求解: 关键每一步递推包含两步!
状态方程预测: $u_{n+1|n} = F u_{n|n} + \alpha$
校正方程: $u_{n+1|n+1} = u_{n+1|n} + K(x_n - A u_{n+1|n})$
- ▶ 一般 k 非常复杂, 涉及矩阵的逆(参见 Woodbury-Morrison 矩阵逆公式);
- ▶ 时间变化会改变已有估计! 应该还有光滑过程, 即 $u_{n|n+1}$ 会发生变化, 要有新的递推过程。

特例: 前向预测误差滤波器

m 阶 Wiener-Hopf 方程: $R_m h_m = r_m$

增广方程: $R_{m+1} \vec{a}_m^T = (P_m, \vec{0})^T, \vec{a}_m = (1, h_m)^T$.

求解 $m+1$ 阶增广方程

- ▶ 利用 R_{m+2} 的 Toeplitz 性质有两个分解
$$R_{m+2} = \begin{bmatrix} R_{m+1} & \vec{r}_{m+1} \\ \vec{r}_{m+1}^T & r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \vec{r}_{m+1}^T \\ \vec{r}_{m+1} & R_{m+1} \end{bmatrix}$$
- ▶ 注意到向前, 向后预测 m 阶方程的解是倒序关系:
 $R_{m+1} (\vec{a}_m^B)^T = (\vec{0}, P_m)^T$
- ▶ 令 $\vec{a}_{m+1} = (\vec{a}_m, 0)^T + k_{m+1} (0, \vec{a}_m^B)^T$
代入 $m+1$ 阶方程,
有 $(P_{m+1}, \vec{0}_m) = (P_m, \vec{0}_{m-1}, \delta_m) + k_{m+1} (\delta_m, \vec{0}_{m-1}, P_m)$ 其中 $\delta_m = r_{m+1}^B \vec{a}_m$.
仅有两个方程 $P_{m+1} = P_m + k_{m+1} \delta_m, \delta_m = -k_{m+1} P_m$
即 $k_{m+1} = -\delta_m / P_m, P_{m+1} = (1 - k_{m+1})^2 P_m$.
- ▶ 称 k_m 为 m 阶反射系数, δ_m 为偏相关系数。

Levinson-Durbin 算法

m 阶 Wiener-Hopf 方程: $R_m h_m = r_m$

增广方程: $R_{m+1} \vec{a}_m^T = (P_m, \vec{0})^T$.

1. 输入 $r(0), r(1), \dots, r(m)$;
2. 初始化: $P_0 = r(0), \delta_0 = r(1), k_0 = -\delta_0 / P_0, a_1 = k_0$
3. m 依次增加; 计算 $P_m = P_{m-1} + \delta_{m-1} k_{m-1}$,
 $\vec{r}_m = (r(1), r(2), \dots, r(M))^T$,
 $\delta_m = r_{m+1}^B \vec{a}_m$,
 $k_m = -\delta_m / P_m$,
 $\vec{a}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_m^B \end{bmatrix} k_m$;
4. 验证 $P_{m+1} = P_m + \delta_m k_m$ 是否满足条件
5. 输出 \vec{a}_m, k_m, P_m .

Levinson算法

解决任一 \vec{d}_m 的情形, 一般称为Levinson算法;

一般的Levinson算法分解为两部分: 一部分递归线性预测 \vec{a}_m (Levinson-Durbin 算法); 另一部分递归计算最优滤波器(系数);

1. 输入: $\vec{r}_m, \vec{d}_m, P_y$
2. 初始化: $P_0(c) = P_y, \delta_0(c) = d_1, k_0(c) = -\delta_0(c)/P_0(c), c_1 = k_0(c)$
3. Levinson-Durbin 计算: $\vec{a}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_m^B \end{bmatrix} k_m$;
4. 计算系数: $\delta_m(c) = -\vec{c}_m^T \vec{r}_m^B + d_{m+1}, k_m(c) = \delta_m(c)/P_m(c)$
 $\vec{c}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{c}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{c}_m^B \end{bmatrix} k_m(c)$;
5. 验证 $P_{m+1}(c) = P_m(c) + \delta_m(c)k_m(c)$ 是否满足条件
6. 输出 $\vec{c}_m, k_m(c), P_m(c), \vec{a}_m, k_m, P_m$.

一般可以构造特别的格式结构利用Cholesky分解直接实现算法;

$R_m^{-1} = L_m D_m^{-1} L_m$, 其中 L_m 由Levinson-Durbin得到的下三角系数 $a_{n,n-j}$ 矩阵, $D_m = \text{diag}(P_1, \dots, P_m)$. 代入可直接解方程!

Schur算法: 直接计算 k_m , 不计算 a_m ;

Beyond Least squares 超越最小二乘法

最小二乘与 L^2 模

- ▶ 最小二乘法是应用最广泛的方法;
- ▶ 应用上对应简单参数大量样本的经典统计模型
方程 $Ac = D$ 是over-determined: 方程数多于未知变量数;
- ▶ L^2 模保证整体误差小, 但可能有小的波动项无法消除;

稀疏压缩与 L^1 模

- ▶ 现代生物信息, 图像, 基因表示等领域发展很快;
- ▶ 应用上对应与样本复杂(参数多)但样本个数少的高维统计问题;
方程 $Ac = D$ 是under-determined: 方程数远少于未知变量数;
希望用到的未知变量个数越少越好 L^0 模。稀疏表示!!!
- ▶ L^1 模是 L^0 模的逼近, 统计意义上证明 L^1 最小的解对应与 L^0 上的最小解;
研究还在继续!

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- ▶ 基为4或其他的FFT变换;
- ▶ FFT的应用;
- ▶ DCT4或其他类型的DCT变换;
- ▶ JPEG的DCT算法简介;
- ▶ 简单小波(B样条)的例子和应用;
- ▶ JPEG2000的DWT算法简介;
- ▶ 图像降噪的小波方法;