

自我介绍

信号处理的数学方法 aka 信号与系统的数学方法 Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

March 1, 2011

- ▶ 张思容: Ph.D. 几何分析, 医学图像分析;
- ▶ 办公时间: 周一(12pm-2pm)或预约。图书馆西配楼501
- ▶ 联系方式: 134-3920-1025. zhangsirong@buaa.edu.cn
- ▶ 欢迎大家学期中提建议和问题, 不要最后要成绩!

Chapter 1: 数学信号处理简介

课程简介

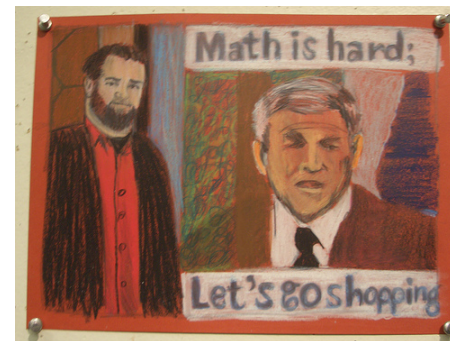
信息科学介绍
课程大纲

信号处理的数学模型

信号与系统
信号处理的例子
信号的数学模型

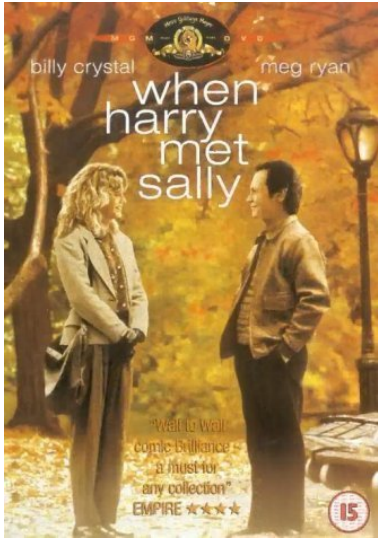
MATLAB简介

Motivation: 从数学到信息科学



- ▶ 信息是什么?
广义: "知识"+"可以理解"
狭义: 人的感官得到something
应用: 信号
- ▶ 信息科学是什么? 例子: 打电话。
信息获取, 信息传输, 信息处理和分析, 信息应用(控制).
- ▶ 相关学科:
EE, 自动化, BME, 系统工程;
- ▶ ***数学方法: (应用数学) 建模+算法
Mathematics for Engineers!

When 应用数学 meets 信号处理!(ICM1998)



- ▶ 史前时代: 百科全书, 统计年鉴, 图书馆...
- ▶ (1950前)傅立叶分析 → 模拟信号
- ▶ (1950s)计算机诞生: 信息论, (1960s) 快速傅立叶变换(FFT) → 数字信号
- ▶ (1970s) 随机过程 → 语音信号
- ▶ (1980s) 调和分析 → 图像信号
- ▶ (1990s-现在) 几何偏微分方程, Markov随机场, 代数几何... → 医学图像, 录像, 计算机视觉。
- ▶ 信号处理的Holy grail: 人工智能 → (模式识别, 统计学习, 自动控制)

课程内容

预备要求: 微积分, 线性代数, 程序设计.

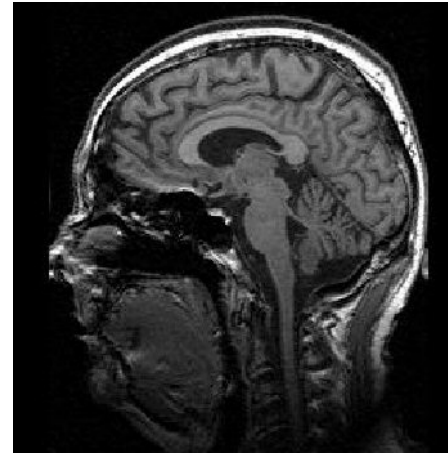
主要目标: 学习不同数学模型的信号处理方法, 应用MATLAB编程***。

主要内容: 连续信号与傅立叶分析; 离散信号与Z变换, 有限信号与小波, 随机信号与自适应信号处理(研究生).

教学参考书:

- ▶ (参考教材)数字信号与图像处理: 郑方,章毓晋. 清华大学出版社.7302120692
- ▶ (参考教材)信号处理的数学方法, 柳重堪. 北航内部讲义。
- ▶ (推荐)Signal Processing for everyone, Gilbert Strang. (介绍文章 60页)
- ▶ (推荐)Computaional Science and Engineering, Gilbert Strang. MIT 公开课程 18.085.
- ▶ Matlab: MATLAB guide, D.Higham. SIAM 或其他MATLAB参考书。

信号的分类



- ▶ 自然信号: 声音, 图像, 电信号, 地震波..
- ▶ 人工信号: 电话, 收音机, 电视, 医学图像。
- ▶ 推广: 股票曲线, 人口曲线..
- ▶ 课程对象: 声音信号和图像信号。
- ▶ MATLAB demos:

课程学习

- ▶ 上课: 提问! Don't waste your time and my time!

研究生: 提问与成绩挂钩。

- ▶ 作业3-4次: 抄袭作业成绩为零!

- ▶ 计算机作业: 机房或自己电脑?

本科生: 可以2-3人一组。

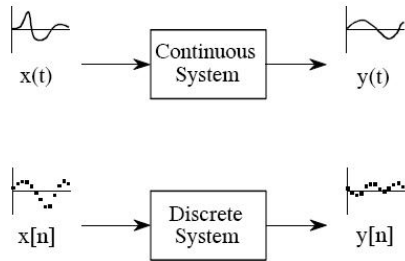
研究生: 可以合作但独立提交完成。

- ▶ 成绩评估(TBA)

本科: 平时作业30+上机作业30+大作业30(?)+ 课堂参与10=100

研究生: 平时作业40+上机作业40+大作业20=100

信号与系统



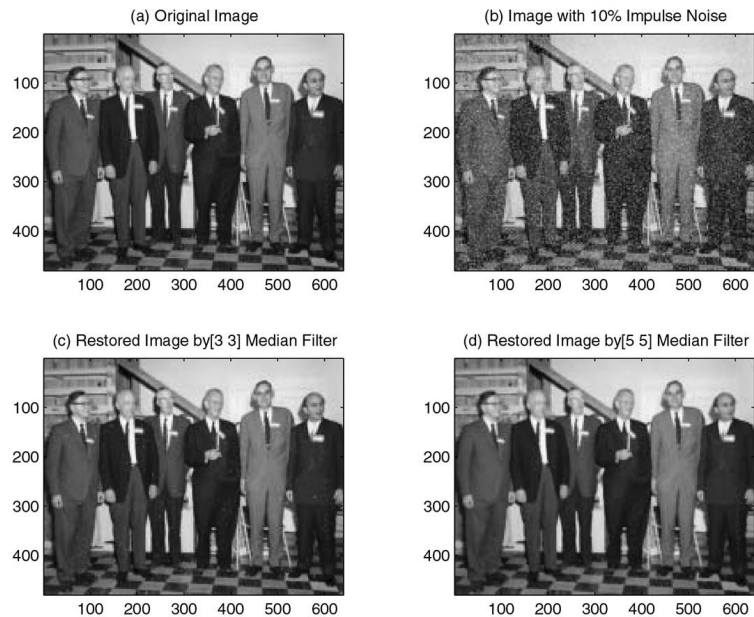
- ▶ 输入信号: $x(t), x(n)$ (冲激信号)
系统: H (滤波器)
输出信号 $y(t), y(n)$ (响应信号)
- ▶ 系统是个黑盒子 (black box)。
常见系统: 差分系统, 加法器, 放大器。
动力系统? 系统控制?
- ▶ 计算机实现: 数据 \rightarrow 变换 \rightarrow 数据。
数学模型?

信号处理的例子



- ▶ 例子: 声音信号处理;
- ▶ 例子: 图像信号处理;
- ▶ 主要内容: 信号降噪, 信号恢复, 信号分析
信号表示与传输 \rightarrow 信息论
信号识别与控制 \rightarrow 模式识别, 系统控制;

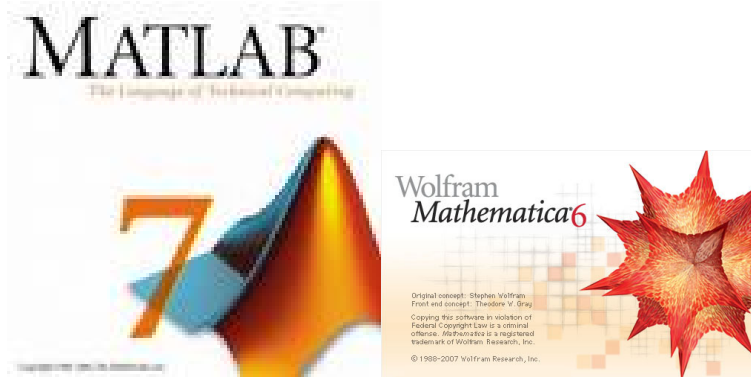
简单图像处理例子



信号的不同模型

- ▶ 确定信号模型: $x(t) \in L^2 \rightarrow$ 傅立叶分析
泛函分析: 函数空间+线性算子 \rightarrow 小波分析
关键: 信号的稀疏表示
- ▶ 随机信号模型: $x(t)$ 是随机过程 \rightarrow 时间序列分析 ARMA
关键: 平稳随机过程, 谱分析 $E(x(t))$
- ▶ 图像的信号模型: 可以 1D \rightarrow 2D 直接推广; (经典信号处理)
关键: 图像的函数空间不存在!
现代信号处理: 一般的图像应该是广义函数, 但处理还是用函数空间 BV (或 TV).
自然图像有伸缩不变的统计特征, 戴放大镜的人可以同样正常的生活!
- ▶ *** 离散的计算模型: 向量与矩阵变换 (应用线性代数!)
关键: 快速算法。

Why matlab?



Matlab=Matrix Laboratory

- ▶ MATLAB VS Mathematica
- ▶ MATLAB优点：交互式环境；平台独立；图形功能强大；应用函数库和工具箱；
- ▶ MATLAB缺点：全英文参考，比低级语言(C)慢；与C编程有区别； 昂贵；

MATLAB 编程提示

- ▶ 所有数据是矩阵； 矩阵是数组，次序:列优先!
- ▶ 交互式或M文件；简单编程结构(可少用for循环)；
- ▶ 图形功能与函数功能；输入可以是矩阵!

使用提示：

- ▶ 大小写字母表示不同变量；
- ▶ `()`, `[]`, `{}`表示不同内容；
- ▶ `help`可用，变量名可看内容；
- ▶ `;`的用途；

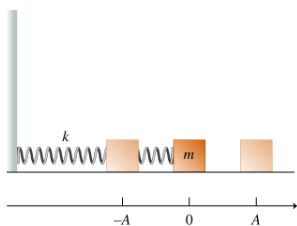
电脑演示：桌面，变量，运算，图形；文件；

信号处理的数学方法 aka 信号与系统的数学方法 Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn
数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

March 15, 2011

简单调和振动



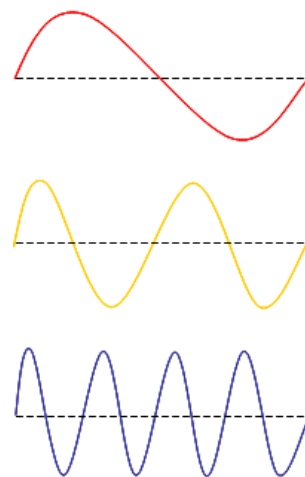
- Hooke定理: $F = -ku$
- Newton定理: $F = ma = m\ddot{u}$
- 方程 $m\ddot{u} = -ku$
- 解: $u(t) = A\cos(ct - \phi)$, 称其中 $c = \sqrt{k/m}$ 为频率, A 为振幅, ϕ 为相位。
- A 和 ϕ 由初值决定。
- 有外力 f 的振动方程求解? $m\ddot{u} + ku = f$ 参考非齐次线性方程求解(齐次解+特解)。
- 一条线上多个节点的简单振动? 产生类似冲浪的效果: 水上下振动, 人平行波动。

Chapter 2: 连续信号与傅立叶变换 Continuous signals and Fourier Transformation

- 1 信号空间: 傅立叶王国 Fourier Kingdom
 - 信号的来源
 - 有限能量信号空间
 - 特殊的数学信号
- 2 系统与变换
 - 傅立叶变换
 - 卷积与LTI系统
 - 连续信号系统: 模拟滤波器

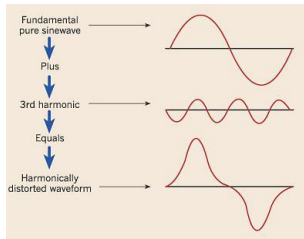
阅读章节: 北航教材 1.1-1.2, 1.3.1-1.3.2; 2.1-2.3; 2.5-2.8;
参考书: Elias Stein, 傅立叶分析导论.
Gasquet and Witomski, 傅立叶分析和应用。

一维波方程



- Newton定理: $F = ma = \rho h \ddot{y}(t)$
- 方程 $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, 简化可取 $\rho/\tau = 1$
- 解一: D'Alembert
 $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$.
- 解二: 分离变量 $u = \mu(t)\nu(x)$,
 $\frac{\ddot{\mu}(t)}{\mu(t)} = \frac{\ddot{\nu}(x)}{\nu(x)} = \lambda$
 $\ddot{\mu}(t) - \lambda\mu(t) = 0, \ddot{\nu}(x) - \lambda\nu(x) = 0$
 $u(x, t) = (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx,$
 $\lambda = m^2$.
- $m = 1$ 基调 fundamental tone, $m = 2$ 第一 overtone (第二 harmonic), ...

波的叠加与傅立叶级数



- 一般解 $u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx$.
- 初值条件 $u(x, 0) = f(x), u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0$.
存在解 $\leftrightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$
- 存在解的必要条件 $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$.
- 推广到 $[-\pi, \pi]$, 奇函数 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$, 偶函数 $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx$,
- 任一函数 $F(x) = f(x) + g(x)$, 是否 $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$?

周期函数的傅立叶级数

Definition

给定 f 是 $[a, b]$ 上可积函数, $L = b - a$, 则 f 的第 n 个傅立叶系数为 $\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$
 f 的傅立叶级数为 $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i 2\pi n x / L}$

相关问题:

- 1 任一信号都有傅立叶级数吗? L^2
- 2 任一函数是信号吗? $f(x) = x^2$? 声音听不出来;
- 3 傅立叶级数可以很好逼近信号吗?
傅立叶分析的重要缺陷: Gibbs现象, 在间断点处, 傅立叶级数永远不可能逼近期望值; 大约上下各0.09的误差。
经典例子: 方波 $SW(t) = 4/\pi(\sin t + \sin 3t/3 + \sin 5t/5 + \dots)$

傅立叶的远见:

Joseph Fourier(1768-1830)



Question:

任意一个连续或不连续的函数是否可以表示为一列连续(光滑)函数的和?

Answer:

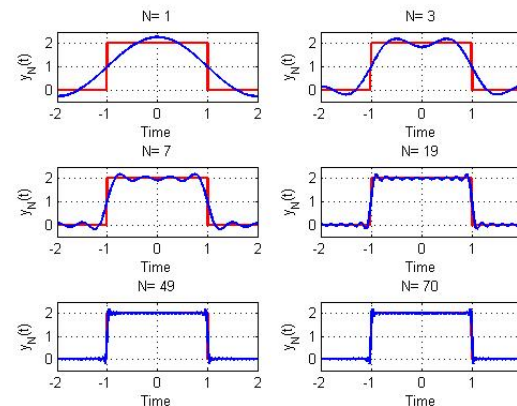
D'Alembert, Euler: 不一定!

J.Fourier: 一定!

Remark

Joseph Fourier: 参与拿破仑的埃及远征; 发现温室效应。

Gibbs 现象



傅立叶级数的收敛问题

主要问题:

记部分和 $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{i2\pi nx/L}$. $S_N(x)$ 在怎样意义下收敛到 $f(x)$?

前提: 傅立叶系数有意义要求 f 是绝对可积!

收敛性: (与函数可微性有关) Why?

- ① 点点收敛。Dirichlet条件: L^1 , 有限间断点, 有限极值。
- ② 平方可积收敛 L^2 。当 $N \rightarrow \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$ 。
- ③ 一致收敛 (uniformly): 如果 f 是两次连续可微, 利用 $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$, $S_N(x) \Rightarrow f(x)$ 。

唯一性: $f(x)$ 连续, 且 $\forall n, \hat{f}(n) = 0$, 则 $f \equiv 0$ 。

Hilbert空间与内积

Definition (内积: $\langle x, y \rangle$)

满足

- ① $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ② $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ③ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\langle x + y, w \rangle = \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle$

诱导范数: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 。

Hilbert空间: 线性内积空间且范数定义的极限是完备的(巴拿赫空间)。

Definition (正交基)

Hilbert空间的一组基 e_i 称为正交基: 如果满足 $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0$ 。

柯西许瓦茨不等式

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

历史注记

Lennart Carleson(1928-)



Theorem (点收敛, Carleson 1966)

任意一个平方可积函数 (L^2) 的傅立叶级数几乎处处收敛。

- Richard Hunt推广到 $L^p, p > 1$ 。
- Kolmogorov(1903-1987)构造一个绝对可积(1924)函数的傅立叶级数处处不收敛。
- Kahane, Katznelson: 任一零测度集, 存在一个连续函数在上面的傅立叶级数处处不收敛。

能量有限的信号空间: L^2, l_2

能量有限的信号: $E(f) = \int f(x)^2 dx < \infty, f(x) \in L^2$.
或者离散信号 $E(f(n)) = \sum f(n)^2, f(n) \in l^2$ 。

Theorem (L^2 的正交基)

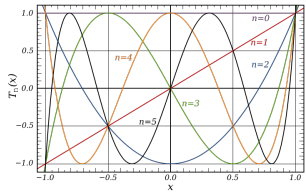
$e_n(x) = e^{inx}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的一组正交基,
且傅立叶级数是最佳逼近 $\|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sum_n c_n e_n\|$
特别它是完备正交基。(存在一致逼近)

Theorem (平方可积收敛)

$f \in L^1(a, b)$, 当 $N \rightarrow \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$.
有Parseval等式 $\sum_n |\hat{f}_n|^2 = \|f\|^2$.
特别有Riemann-Lebesgue定理: $|n| \rightarrow \infty, \hat{f}(n) \rightarrow 0$ 。

注记: 一般考察Hilbert空间有可数个完备正交基, 是有限维欧几里德空间的推广。

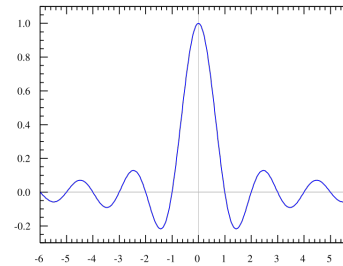
L^2 的正交基



- 多项式基正交化: $t^i : i = 1, 2, \dots \rightarrow$ Legendre多项式 $\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$.
- (左边图)切比雪夫多项式 Chebyshev $T_n(t) = \cos(n \arccos t), n = 0, 1, 2, \dots - 1 \leq t \leq 1$
- Bessel 函数: 来源于二维对称振动方程(鼓). $r^2 B'' + rB' + \lambda r^2 B = n^2 B$ 其中 $B(r)$ 的沿轴向的振动, r 是半径, λ 是鼓的频率, n 是Bessel函数的阶。一般Bessel函数记为 $J_n(\lambda_k r)$.

典型信号

- 指数信号 $x(t) = Ae^{bt}, b \in \mathbb{C}$
周期信号: (正弦与余弦信号)
- 单位信号: 单位矩形信号 $G_1(t)$ (方波脉冲), 单位阶跃信号 $u(t)$ (方波($SW(t)$)), 单位斜变信号 $R(t)$ (三角波) 关系: $R(t) = \int u(t)$.
- 特殊信号: 抽样信号 $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$, MATLAB: *sinc*函数。



δ 函数

单位冲激信号的不同定义:

- 1 方波的导数: $\delta(t) = SW'(t) = 4/\pi(\cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots)$. 不收敛!
- 2 在一点的力: $u'' = \delta(t)$, 方程的解为 $u(t) = -R(t - a) + ct + d$; 参见: Green函数。由不同 δ 函数的解可以得到 $u'' = f$ 的通解!
- 3 狄拉克定义: $\int \delta(t)dt = 1, \delta(t) = 0, t \neq 0$. 抽样特性 $\int \delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)$.
- 4 线性泛函: $\delta : H \rightarrow R, \delta(f(t)) = f(0)$.
- 5 函数逼近: 方波脉冲的逼近; $\delta(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G_s(t)}{s}$ 高斯函数的逼近。

信号空间及其运算

Definition (复 $L^2(0, 2\pi)$ 空间及三角函数基)

信号函数 $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, 记三角函数基为 e^{int} , 内积 $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, 则能量有限的信号 f 组成一个希尔伯特空间。 f 的傅立叶级数展开记为 $\sum c_k e^{int}$.

信号的运算: 信号变换后还是信号?

- 线性运算(线性空间)
- 平移: $f(t) \rightarrow f(t - h)$; 信号延迟
- 反射: $f(t) \rightarrow f(-t)$; 信号颠倒
- 伸缩: $f(t) \rightarrow af(at)$; 信号放大;
- 乘积: $f(t)g(t)$: 信号调频;
- 微分与积分: $f(t) \rightarrow f', \int f$???
- 卷积: $f(t) * g(t)$???

信号变换：正交变换

Definition (希尔伯特空间的正交变换)

定义线性变换 $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 $\langle Af, Ag \rangle = \langle f, g \rangle$, 即保持内积不变, 称为 希尔伯特空间上的一个正交变换。

任意两组正交基的不同表示得到一个正交变换;

注: $f(t)$ 展开成傅立叶级数是 $L^2 \rightarrow l^2$ 的一个线性映射(正交?)

常见变换:

- 平移算子: $T_h(f(t)) = f(t - h)$?
- 反射算子: $R(f(t)) = f(-t)$; ?
- 伸缩算子: $S_a(f) = af(at)$; ?
- 乘积算子: $M_g(f) = f(t)g(t)$, 卷积算子: $C_g(f) = f * g$?
- 微分与积分算子: $D(f) = f', I(f) = \int f$?

Schwartz 空间傅立叶变换

Definition (傅立叶变换)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Proposition

- 1 平移 $f(x + h) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$
- 2 放大 $f(\lambda x) \rightarrow \lambda^{-1} \hat{f}(\lambda^{-1} \xi)$
- 3 微分 $f'(x) \rightarrow 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$
- 4 卷积 $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

Theorem (傅立叶变换是 $S(\mathbb{R})$ 上的线性变换.)

若 $f(x) \in S(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(\xi) \in S(\mathbb{R})$, 特别高斯函数变到本身。

傅立叶变换: 非周期函数的正交变换

一般的信号非周期函数,

怎样定义 $\hat{f}(n) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx} dx$? 前提: f 在无穷大时, 应该快速收敛到零(比如 $1/x^2$).

Definition (Schwartz 空间: $S(\mathbb{R})$)

其中的函数 f 无穷次可微且所有导数快速递减,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty, \quad \text{for every } k, l \geq 0.$$

EXAMPLE (高斯函数和 bump functions)

$$K_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\pi x^2 / \sigma}. \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}} e^{-\frac{1}{b-x}}, \quad a < x < b$$

Proposition

- 1 S 是线性空间, 对微分和多项式乘法封闭。

Schwartz 空间傅立叶变换是正交变换

Definition (傅立叶逆变换)

$$\text{记傅立叶变换 } \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

$$\text{则傅立叶逆变换 } \mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Proposition

- 1 乘积公式 $\int_{-\infty}^{\infty} f \hat{g} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} g dt$
- 2 逆定理 $\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f) = f$:
即 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$
- 3 Plancherel 定理: $\|\hat{f}\| = \|f\|$. 为 L_2 范数。
- 4 *** Poisson 求和公式。 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi i x n}$, 特别 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$ 。

傅立叶变换: Schwartz空间到 L^2 空间

关键结果:

- 1 Schwartz 空间在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密;
- 2 傅立叶变换 \mathcal{F} 是Schwartz 空间上的正交(可逆)变换; $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- 3 \mathcal{F} 存在从Schwartz 空间到完备空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的扩张。

Theorem (L^2 空间的傅立叶变换)

\mathcal{F} 给出 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个正交(等距)变换。

- 1 $\hat{\hat{f}} = f$;
- 2 $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- 3 $\|f\| = \|\hat{f}\|$

注记: 可以进一步推广到广义函数(线性泛函)。

系统与算子

系统 H 是一个函数空间的算子(或变换)。 $H: x(t) \rightarrow y(t)$

常见信号运算都是算子。

常见系统:

- 线性系统: $H(ax + by) = aH(x) + bH(y)$
连续算子?
- 时不变系统: $H(x(t-k)) = y(t-k)$
信号处理对象 \rightarrow 线性时不变算子: LTI系统!
- 稳定系统: BIBO稳定系统 $x(t)$ 有界则 $y(t)$ 有界;
- 因果系统: $y(t_0)$ 依赖 $x(t), t \leq t_0$. 即系统不能预测。
- 例子:有限差分方程 $\sum_i a_i y(t-i) = \sum_j b_j x(t-j)$
- 再抽样算子: $S(x(n)) = x(nP), P \in \mathbb{N}$
是否是因果系统?

海森堡不确定原理: 傅立叶分析的局限

Theorem (海森堡不确定定理)

设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|f\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx = 1$, 有

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \hat{f}^2(\xi) d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

仅当 $f(x) = Ae^{-Bx^2}, B = A^4\pi/2$ 时等号成立。

Remark (物理解释:位置不确定性 \times 动量不确定性 $\geq \frac{h}{16\pi^2}$)

- 原子位于 $[a, b]$ 的概率为 $\int_a^b \psi^2 dx$.
- 原子的位置是期望 $x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi^2 dx$, 位置的方差是 $\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 \psi^2 dx$
- 对应有原子的动量分布为 $\int_a^b \hat{\psi}^2 dx$ 和方差。

卷积

Definition (卷积与周期卷积)

给定 $f, g \in L^2$, 定义卷积 $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx$;

特别如果 f, g 是周期 2π 可积函数, 则定义周期卷积

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dx$$

注记: 卷积即小学的多位整数乘法(不进位!)

- 卷积满足线性, 交换律, 结合律。
- $f * g$ 是连续的, 且 $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.
- 微分与积分: $D(f) * I(g) = f * g$.(周期函数)
- 傅立叶级数的收敛判定: 记部分和 $S_N(x) = (f * D_N)(x), D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin(x/2)}$
称为狄利克雷核, 还有Fejer, Abel, Gauss核。

连续信号LTI系统的模型

Remark

傅立叶王国：一般的能量信号可以看成 $L^2(0, 2\pi)$ 或 $L^2(R)$ 的函数。更广义的：能量信号属于一个Hilbert空间。

线性时不变系统(LTI)：是Hilbert空间的一个线性算子且与平移算子可交换。

Theorem (LTI系统基本结论)

线性时不变系统 \mathcal{H} 完全由单位冲激信号 $\delta(t)$ 的冲激响应 $h(t)$ 决定。且 $\mathcal{H}(x(t)) = h(t) * x(t)$ 。(所有LTI是个卷积系统)。

L^2 有很多正交基，对应的有不同的正交分解，为什么用三角函数基？为什么用傅立叶变换？

Theorem (LTI系统特征向量)

三角函数基是所有线性时不变系统 \mathcal{H} 的公共特征向量。

指数函数是所有LTI系统的特征向量

Theorem (有界正规算子的谱)

Hilbert空间上可以互相交换的对称(正规)算子族(至少存在一个有界算子)存在共同的特征向量。

正规算子(normal operator): $N \circ N^* = N^* \circ N$ 其中 $\langle Nx, y \rangle = \langle x, N^*y \rangle$ 。

Corollary

所有的LTI系统是卷积系统。卷积可以交换,且与平移算子 T_s 可交换,所以存在一组共同的特征向量。特别有 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

- 卷积算子可交换 $h_1 * h_2 * x = h_2 * h_1 * x$
- 卷积与平移算子 T_s 可交换;
- 满足 $h * e = \lambda e$, $T_s(e) = t_s e$, 仅有指数函数满足该方程!
- 直接验证 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

单位冲激信号与LTI系统的卷积解释

- δ_0 是一个线性泛函(可能无界!)。 $\langle \delta_0, x(t) \rangle = x(0)$
是否有Riesz表示定理? $\langle \delta_0, x(t) \rangle = \langle z(t), x(t) \rangle$
- 一般的函数表示有 $x(t) = \langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle$ 。
- 记 $\mathcal{H}(x(t)) = y(t)$, 则 $y(t) = \mathcal{H}(\langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle) = \langle \mathcal{H}(\delta_{t-s}), x(s) \rangle$
- 一般的可以定义 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle \delta, \mathcal{H}(x(t)) \rangle$
假设 $\mathcal{H}(\delta)$ 是有界泛函!, 由Riesz表示定理。 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle h(t), x(t) \rangle$ 。
- 设 $T_s(x(t)) = x(t-s)$, 则 $H \circ T_s = T_s \circ H$ 。
特别 $y(t) = \langle T_s(h(t)), x(s) \rangle = \langle h(t-s), x(s) \rangle = h(t) * x(t)$ 。

Remark

一般的 $\delta(t)$ 看成广义函数(distribution), 可以求导, 积分等。

指数函数是所有LTI系统的特征向量

Theorem (有界正规算子的谱)

Hilbert空间上可以互相交换的对称(正规)算子族(至少存在一个有界算子)存在共同的特征向量。

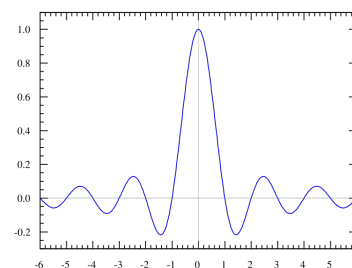
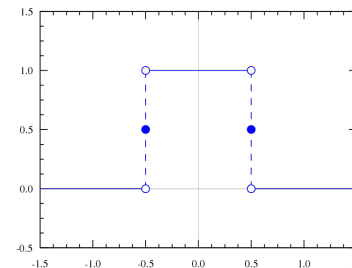
正规算子(normal operator): $N \circ N^* = N^* \circ N$ 其中 $\langle Nx, y \rangle = \langle x, N^*y \rangle$ 。

Corollary

所有的LTI系统是卷积系统。卷积可以交换,且与平移算子 T_s 可交换,所以存在一组共同的特征向量。特别有 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

- 卷积算子可交换 $h_1 * h_2 * x = h_2 * h_1 * x$
- 卷积与平移算子 T_s 可交换;
- 满足 $h * e = \lambda e$, $T_s(e) = t_s e$, 仅有指数函数满足该方程!
- 直接验证 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

简单信号：矩形波



- 作为周期函数的矩形波: $G_2(t) = 1$, 周期 $T = 2\pi$
傅立叶展
开 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n 2/\pi \text{Sa}(n) \cos nt$ 。
- 傅立叶展开的复数形式:
 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n \frac{1}{\pi} \text{Sa}(n) e^{-int}$
- 作为有限区间函数的矩形波: $G_2(t) = 1$ 。
傅立叶变换 $\widehat{G}_2(w) = 2\text{Sa}(w)$ 。
- 特别傅立叶系数 $F_n = \widehat{G}_2(nw)/(2\pi)$

广义信号

Remark (广义信号的傅立叶变换)

一般的 C_c^∞ 上的线性泛函称为分布(distribution).看作可积函数定义的泛函的推广。称为广义函数。

广义函数的傅立叶变换: 对任何函数 $x(t) \in S$, $\langle \widehat{f}, x(t) \rangle = \langle f, \widehat{x(t)} \rangle$

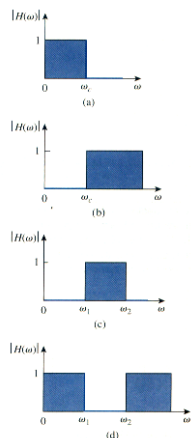
- 复指数信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$
傅立叶变换 $X(w) = \frac{1}{a+iw}$
- 符号函数 $sign(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}$
傅立叶变换 $SIGN(w) = \frac{2}{iw}$.
- 单位冲激函数 $\delta(t), \widehat{\delta} = 1$
特别 $\widehat{1} = 2\pi\delta(t)$.
- 单位阶跃函数 $u(t) = 1/2 + sign(t)$,
 $\widehat{u}(t) = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw}$.

LTI系统

LTI系统完全由 $h(t)$ 决定。

- 卷积的线性,与平移交换 \rightarrow 线性时不变
- $h(t) = 0, t < 0 \rightarrow$ 因果系统;
- $\int |h(t)| < \infty \rightarrow$ BIBO稳定系统;
- 频率响应:记 $H(w) = \widehat{h(t)}$,则输出信号频率 $Y(w) = H(w)X(w)$
称 $|H(w)|$ 为幅度频率响应; $arg(H(w))$ 为相位频率响应。
- 一般经典信号系统主要应用于频率的处理,称为模拟滤波器。
分类:低通(lowpass),高通(highpass),带通(bandpass),带阻(bandstop),全通(allpass)等。

理想滤波器及实现



- 全通系统(无失真)的频率响应: $H(w) = Ae^{-iwT_d}$,
 A 是频率, T_d 是群延时。
- 理想低通滤波器的频率响应:
 $H(w) = G_{2w_c}(w)e^{-iwT_d}$
- 注意: $h(t) = \frac{w_c}{\pi} Sa(w_c(t - T_d))$ 不是因果系统, 所以不能实现!
而且是无穷函数, 一般用有理多项式逼近。
- 常见模拟滤波器:
Butterworth滤波器: $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+B^2\omega^{2n}}$
切比雪夫滤波器: $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)}$
椭圆滤波器: $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 U_n^2(\omega)}$

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- L^2 空间的其他正交基;
- Gibbs现象(数学解释及高维情形)
- δ 函数的严格定义及其在微分方程中的应用(Green 函数);
- Schwarz空间上的傅立叶逆定理(傅立叶变换的逆变换是其本身)。
- 海森堡测不准定理;
- 常见模拟滤波器的实现;

信号处理的数学方法 aka 信号与系统的数学方法 Mathematical Methods in Signal Processing

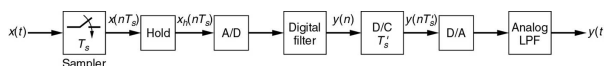
张思容

zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

April 12, 2011

从连续信号到离散信号



- 连续(或模拟)系统的实现: $H(\Omega)$ 由固定类函数逼近; 有固定电路实现(RLC), (专业软件设计);省电!
问题: 存在物理限制(太高频?); 设计复杂; 不精确(物理误差);
- 离散(或数字)系统的实现: $H(\Omega)$ 由有理函数逼近, 无限精确; 滤波器由电脑软件实现, 无物理限制; 增加AD转换, DA转换器;
问题: 耗电, 速度慢; 抽样信号的限制;
- AD转换器: 理想脉冲抽样 $x(t) \rightarrow x(nT_s)$, T_s 是抽样周期; 实际可能是矩形脉冲抽样;
- DA转换器: 理想插值公式可以完全重构; 实际用低通滤波器.

主要问题: 存在完全重构的插值公式吗? $x(n) \rightarrow x(t)$?

一般要限制 $x(t)$ 的函数空间, 比如多项式?

Chapter 3: 离散信号与z变换 Discrete signals and Z-Transformation

- 离散信号
 - 抽样定理
 - Z变换与DTFT
 - 例子与计算
- 离散LTI系统
 - 离散LTI系统的传递函数
 - 离散LTI系统的例子
 - 数字滤波器的设计

阅读章节: 北航教材 1.4,1.5,4.9;

参考书: 数字信号与图像处理: 第三章

G.Strang: Computational Science and engineering:

抽样信号及混叠aliasing

抽样与频率变化:

- 抽样频率: 间隔时间 T_s 选取样本 $x(nT_s)$. T_s 是抽样周期(秒), $f_s = 1/T_s$ 是抽样频率(单位HZ), $w_s = 2\pi/T_s$ 是抽样角频率(或抽样频率).
- 信号抽样频率: 设真实信号频率 f, w , 则抽样后数字信号频率 $f' = f/f_s, w' = 2\pi w/w_s = wT_s$
- 常用归一化频率: 为简化分析, 设 $T_s = 1, w_s = 2\pi$, 则抽样信号记为 $x(n)$, 数字信号频率属于 $[0, 2\pi]$,

抽样信号的混叠aliasing

- 设真实信号 $x(t) = \cos wt$, 抽样信号 $x(n) = \cos w'n$
- $w_s = 2w, x(n) = \cos \pi n$, 是最高频率信号, 称为Nyquist频率;
- $w_s = 4w, x(n) = \cos \pi/2n$, 是过抽样oversampling
- $w_s = 4/3w, x(n) = \cos 3\pi/2n$, 是欠抽样undersampling
***两个抽样一样 $1, 0, -1, 0 \dots$ 称为混叠aliasing(高频被低频表示);
- 特别: $\sin \pi n$ 与 $\sin 0$ 混叠。Nyquist频率对正弦信号不够, 一般要求信号的最大频率 $w \leq \pi/T_s$, 即抽样后信号频率 $w' \leq \pi$.

Shannon 插值公式(完全重构)

Theorem (Nyquist - Shannon定理)

抽样信号可以完全恢复原连续信号必须满足:
 (1)原信号是频率范围(频带)有限的,设最高频率 w_c ;
 (2)抽样频率至少是最高频率的两倍。 $w_s \geq 2w_c$.
 称 $2w_c, 2f_c$ 为奈奎斯特率, 称采样率 w_s 的一半为奈奎斯特频率。
Shannon 插值公式: 设抽样信号的高频频率(归一化后)为零 $\hat{x}(w) = 0, |w| \geq \pi$, 则 $x(t) = \sum x(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$

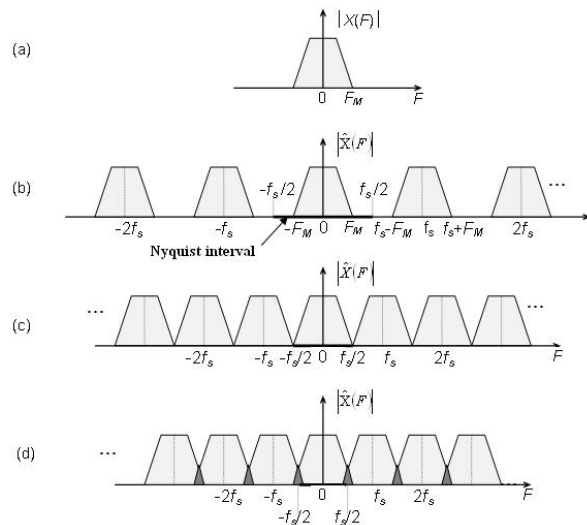
注记: 电话: 8kHz (通话3.4kHz); CD: 44.1kHz (声音20kHz)

Proof.

***假设 $x(n)$ 的傅立叶变换是周期函数。
 有傅立叶级数 $\hat{x}(w) = \sum c_n e^{inw}$, 验证: $c_n = x(-n)$.
 代入傅立叶逆变换定理 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum c_n e^{inw}) e^{iwt} dw$ 可得!



抽样信号的混叠现象aliasing



抽样定理证明:周期函数的离散谱

- 设周期函数在周期 $[0, T_1]$ 中定义为 $f_0(t)$;
- 周期函数的数学表示: $f(t) = \sum f_0(t - nT_1)$
 $f(t) = f_0(t) * \Delta_{T_1}(t)$

Proposition (Dirac comb的变换)

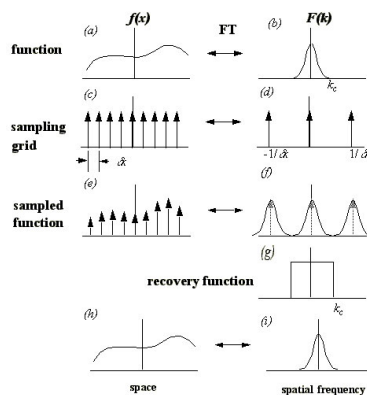
Dirac comb 是离散的周期序列。 $w_1 = 2\pi/T_1$, 有傅立叶展开 $\Delta_{T_1}(t) = \frac{1}{T_1} \sum e^{nw_1 t}$.
 傅立叶变换: $\widehat{\Delta_{T_1}(t)} = w_1 \Delta_{w_1}(w)$.

Corollary (周期函数的离散谱)

$$\widehat{f(t)} = \widehat{f_0} \cdot \widehat{\Delta_{T_1}(t)} = \sum (w_1 F_0(nw_1)) \cdot \delta(w - nw_1).$$

注记: 时域周期对应频域离散。

抽样定理证明:抽样函数的周期谱



- 数学表示: $f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}(t)$
- 卷积公式: $\widehat{f_s(t)} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f(t)} * \widehat{\Delta_{T_s}(t)}$
- 周期谱 $F_s(w) = \frac{1}{T_s} \sum F(w - nw_1)$.
 $F(w) = \widehat{f}$.
- 信号理想恢复:可以直接用频率域上方波相乘, 再傅立叶逆变换。
- 一般情况:使用低通滤波器直接得到信号。
- 有其他的抽样方法(矩形抽样定理, 频率抽样定理)。

拉普拉斯变换LT

单边LT变换:

- 目标: 任意函数可作"傅立叶"变换; $x(t)e^{-At}$
- 变换: $X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt, s = A + iw$.
- 收敛条件: $x(t)$ 分段连续, $|x(t)| \leq Ae^{Mt}$.
- 例子: $x \equiv 1, X(s) = 1/s$, 但傅立叶变换不存在.
- 逆变换: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds,$

双边LT变换:

- 推广双边Laplace变换: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$
s称为复频率。实变函数→复变函数!
- 如果傅立叶变换存在, $\widehat{x}(t) = X(s)|_{s=wi}$.
- 收敛域ROC的不同: $e^{At}\mu(t)$ 与 $-e^{At}\mu(-t)$ 的LT变换为 $\frac{1}{s-a}$, 收敛域 $Re(s) > a, Re(s) < a$.

离散时间傅立叶变换

物理频率的表示:

LT变换: s是复频域, 真实频率 $s = iw$: 虚轴;

z变换: $z = e^s$, 真实频率变到 e^{iw} : 单位圆。

设抽样信号 $x_s(t)$, 则其 $LTX_s(s) = \sum x(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

- 定义: $X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}$
- 谱为 2π 周期函数. 特别 $X(e^{i\omega}) = X(z)|_{z=e^{i\omega}}$
- 收敛条件: $x(n)$ 绝对可和. 其他? ROC包含单位圆.
- 周期卷积: $x_1(n)x_2(n) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{i\theta})X_2(e^{i(\omega-\theta)})d\theta$.

注: 与傅立叶变换不一样!!!

Z变换

抽样信号的LT变换:

- Dirac Comb: $\Delta_{T_s}(t) = \sum \delta(t - nT_s)$
- LT变换: $L(\Delta_{T_s}) = \frac{1}{1-e^{-sT_s}}$
- 抽样信号: $f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}(t)$
 $L(f_s) = \sum_0^{+\infty} f(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

Definition (Z变换)

设抽样信号 $x_s(t)$, 则其 $LTX_s(s) = \sum x(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

令 $z = e^{sT_s}$ 或 $s = \ln z / T_s$, 有 $X(z) = \sum x(nT_s)z^{-n}$.

一般的归一化表示 $T_s = 1$, 有序列信号 $x(n)$, Z变换 $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$.

Z变换的物理意义?

复分析回顾: Best functions

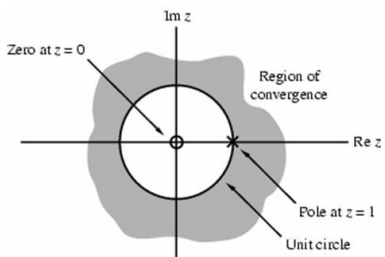
最佳函数: 解析函数

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
 $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ 无穷光滑不解析!
- 收敛域: 圆盘 $1/r = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$.
收敛域内任意函数值可以多项式指数逼近(泰勒公式仅仅是局部逼近);
→ 1970s 谱方法 (1950s 有限差分方法, 1960s 有限元方法)

亚纯函数或Laurent级数

- $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$
一般仅考虑有限负项, 则 $f(z)(z - p_1)(z - p_2) \dots$ 是解析的, 称 p_i 为极点;
- 收敛域: 可能是圆盘外 $|z| > r$, 圆环; $R_2 > |z| > R_1$, 收敛域内解析!
一般以极点为边界;

Z变换的收敛域



- Laurent 罗朗级数的收敛：在收敛域内每一点解析!
- $\sum x(n)z^{-n}$ 收敛的充要条件： $\sum |x(n)z^{-n}| < +\infty$
判别法则：比值或根值判别。
- 例子：双边有限序列；
左边序列；右边序列；
双边无限序列可能不存在Z变换!
- 复变函数的零点 z_i 和极点 p_j ：
 $F(z_i) = 0, 1/F(p_j) = 0$
- 结论：ROC以极点为边界!

Z变换的性质

Property	Sequence	z-Transform	ROC
	$g[n]$ $h[n]$	$G(z)$ $H(z)$	\mathcal{R}_g \mathcal{R}_h
Conjugation	$g^*[n]$	$G^*(z^*)$	\mathcal{R}_g
Time-reversal	$g[-n]$	$G(1/z)$	$1/\mathcal{R}_g$
Linearity	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(z) + \beta H(z)$	Includes $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
Time-shifting	$g[n - n_0]$	$z^{-n_0} G(z)$	\mathcal{R}_g , except possibly the point $z = 0$ or ∞
Multiplication by an exponential sequence	$\alpha^n g[n]$	$G(z/\alpha)$	$ \alpha \mathcal{R}_g$
Differentiation of $G(z)$	$ng[n]$	$-z \frac{dG(z)}{dz}$	\mathcal{R}_g , except possibly the point $z = 0$ or ∞
Convolution	$g[n] \otimes h[n]$	$G(z)H(z)$	Includes $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C G(v)H(z/v)v^{-1} dv$	Includes $\mathcal{R}_g \mathcal{R}_h$
Parseval's relation		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C G(v)H^*(1/v^*)v^{-1} dv$	

Note: If \mathcal{R}_g denotes the region $R_{g-} < |z| < R_{g+}$ and \mathcal{R}_h denotes the region $R_{h-} < |z| < R_{h+}$, then $1/\mathcal{R}_g$ denotes the region $1/R_{g+} < |z| < 1/R_{g-}$ and $\mathcal{R}_g \mathcal{R}_h$ denotes the region $R_{g-}R_{h-} < |z| < R_{g+}R_{h+}$.

特别:z域卷积(复卷积)是周期卷积(沿圆周积分)!

常见序列Z变换

- 单位冲激序列: $\delta(n), X(z) = 1$
注意: 单位冲激序列不是单位冲激函数的离散抽样!
- 单位阶跃序列 $u(n), X(z) = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$
矩形序列: $G_N(n), X(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$
- 指数序列 $a^n u(n), X(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$
余弦序列 $\cos(n\omega_0)u(n), X(z) = \frac{z(z-\cos \omega_0)}{z^2-2z \cos \omega_0+1}$.
- ***再抽样序列: $x_b(n) = x(nb)$
- Downsampling降抽样: $x_M(n) = x(Mn), M \in \mathcal{N}$
Z变换 $X_M(z) = X(z^{1/M})$ ROC变化!
- UpSampling升抽样: $x_{1/M}(n) = x(n/M), M \in \mathcal{N}$ (要补零);
Z变换 $X_{1/M}(z) = X(z^M)$ ROC变化!

复分析回顾: 留数与积分公式

积分公式

- 柯西定理: 解析函数 $\oint_C f(z)dz = 0$
- 柯西积分公式: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$
特别 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

留数

- Laurent级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz$ 称为在极点 z_0 处的留数 $Res(z_0)$;
一般 $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.
- 留数定理: $\oint_C f(z)dz = 2\pi i(Res(z_0) + Res(z_1) + \dots)$.
- 有理函数 $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ 在简单极点(一阶) z_0 处留数为
 $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) = \frac{N(z_0)}{D'(z_0)}$

逆Z变换

Theorem (逆Z变换公式)

$x(n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$, C 为收敛域内一封闭曲线。

Corollary

离散时间傅立叶变换(DTFT)的逆变换:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega})e^{i\omega n} d\omega$$

计算方法:

- 有理分式展开 $X(z)/z = \frac{N(z)}{D(z)}$
- 幂级数展开, $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$ 长除法;
- 直接计算: 利用简单函数的Z变换的运算。

离散LTI系统

离散线性时不变系统(LTI)

Theorem

离散线性时不变系统(LTI)是卷积系统: $y(n) = x(n) * h(n)$ $h(n)$ 是 $\delta(n)$ 的单位冲激响应。

Outline: $x(n) = \sum x(m)\delta(n-m), \delta(n-m) \rightarrow h(n-m)$.

- 离散系统基本运算: 单位延时, 加法器, 放大器。
- 复杂系统: 系统的并联(响应函数加法), 串联(响应函数卷积复合);
- LTI因果系统当且仅当 $h(n)$ 是因果序列
- LTI稳定当且仅当 $\sum |h(n)| < +\infty$

一般模型(ARMA): 可以看成是一个常系数差分方程

$$\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j).$$

离散LTI系统的传递函数

Definition (传递函数)

一个离散LTI的输入输出信号Z变换的比值 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 称为系统的传递函数或系统函数。

特别: 有理传递函数 $\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j)$, 则 $H(z) = \frac{\sum a_j z^{-j}}{\sum b_i z^{-i}}$

- $H(z)$ 的逆z变换是 $h(n)$.
- LTI因果系统 等价: 传递函数的ROC为某个圆外部。有理系统: 分子不大于分母的阶;
- LTI稳定 等价: 传递函数的ROC包含单位圆。因果有理系统: 极点在单位圆内。

系统频率响应

$$H(\omega) = |H(z)|e^{i \arg H(z)}, \arg(H(z)) = \arctan(H_i m(z)/H_r e(z))$$

特别 $Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})e^{i\omega n}$, 是系统对正弦信号的响应。

系统的分类

有理传递函数频率响应: $H(e^{i\omega}) = \frac{p_0}{d_0} e^{i\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{i\omega} - \xi_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{i\omega} - \lambda_k)}$,

幅度响应 $|H(e^{i\omega})| = \left| \frac{p_0}{d_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |e^{i\omega} - \xi_k|}{\prod_{k=1}^N |e^{i\omega} - \lambda_k|}$

相位响应 $\theta(\omega) = \arg H(e^{i\omega}) =$

$$\arg \frac{p_0}{d_0} + \omega(N-M) + \sum_{k=1}^M \arg(e^{i\omega} - \xi_k) - \sum_{k=1}^N \arg(e^{i\omega} - \lambda_k)$$

- 按幅度响应分类: 理想滤波函数: 低通, 高通, 带通, 带阻; 有界实传递函数BR: $|H(e^{i\omega})| \leq 1$, 特别无损系统如果能量不变。全通传递函数: $|H(e^{i\omega})| = 1$
- 按相位响应分类: 零相位传递函数: $\theta(\omega) = 0$ 不存在零相位因果滤波器。线性相位传递函数: $H(e^{i\omega}) = e^{-i\omega D}$, 群延迟 $\tau(\omega) = D$ ***最小最大相位传递函数: 所有零点 $|\xi_k| < 1$ 称为最小相位; 反之最大相位; 不一定则是混合相位;
- 对有理传递函数 $H(z) = N(z)/D(z)$, 按响应项数分类: FIR: 有限冲激响应 $D(z) = 1$, $h(n)$ 有限项; 又称为全零点滤波器; IIR: 无穷冲激响应 $D(z) \neq 1$, $h(n)$ 无限项; 又称为递归滤波器;

简单滤波器:MA,MD

移动平均滤波器 $y(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$

- DC直流信号 $x(n) = 1 \rightarrow y(n) = 1$, AC交流信号 $x(n) = (-1)^n \rightarrow y(n) = 0$.
- 一般频率信号 $e^{inw} \rightarrow (0.5 + 0.5e^{-inw})e^{inw}$.
- $H(e^{iw}) = 0.5 + 0.5e^{iw} = e^{-iw/2} \cos(w/2)$ 是低通滤波器。特别是线性相位滤波器。

类似：移动差分滤波

器 $y(n) = 0.5x(n) - 0.5x(n-1), H(e^{iw}) = e^{-iw/2} i \sin(w/2)$.

Proposition (对称得到线性相位)

如果 $h(k) = h(N-k)$, 则 $H(w) = e^{-iWN/2} |H(w)|$, 特别 $|H(w)|$ 是偶函数。

语音信号预处理: $y(n) = x(n) - ax(n-1), 0 < a \leq 1$.

$|H(e^{iw})| = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos w}$ 是关于 $w \in [0, \pi]$ 的增函数。(放大高频)。

数字滤波器设计过程

目标：构造传输函数 $G(z)$ 逼近指定的频率响应。

- 设计指标：参数 $\omega_p, \omega_s, \delta_p, \delta_s$
- 确定滤波器类型：FIR, IIR
- 确定滤波器的阶数：N
- 给出滤波器的系数： $P(z), P(z)/Q(z)$
- 利用计算机迭代优化系数。

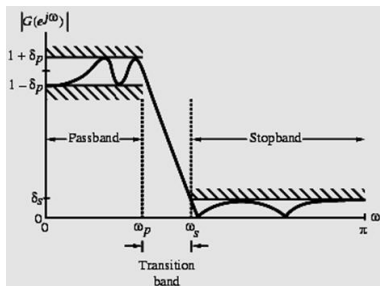
注记：构造可逆复变换 $s = F(\hat{s})$ 得到频率变换。不同频率响应的滤波器可以转换为低通滤波器；

高通 $\Omega = -\frac{\Omega_p \hat{\Omega}}{\hat{\Omega}}$, $\hat{\omega} = -1/\omega$

带通 $\Omega = -\Omega_p \frac{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}{\hat{\Omega} B_\omega}$, $\hat{\omega} = \omega - 1/\omega$

带阻 $\Omega = \Omega_s \frac{\hat{\Omega} B_\omega}{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}$, $\hat{\omega} = \frac{1}{\omega - 1/\omega}$

低通数字滤波器设计指标

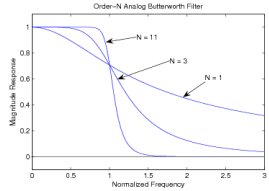


- 通带截止频率 ω_p , 阻带截止频率 ω_s
- 通带
上 $|\omega| \leq \omega_p, 1 - \delta_p \leq |G(e^{i\omega})| \leq 1 + \delta_p$
阻带上 $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi, |G(e^{i\omega})| \leq \delta_s$
- 峰波纹值 δ_p, δ_s 用损益函数表示 $\alpha_p = -20 \lg(1 - \delta_p) dB$, $\alpha_s = -20 \lg(\delta_s) dB$, 称为通带峰值波纹, 最小阻带衰减。
- 单位化：设幅度最大值为1；通带波纹表示 $1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$ ；阻带波纹表示 $1/A$
- ***其他参数：选择性参数： $k = \omega_p/\omega_s < 1$
分辨参数： $k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \ll 1$.

数字滤波器的设计方法

- FIR: 各种窗口估计公式；调整系数；。。。
fir1, firpm, fircls;
- IIR: 利用成熟的模拟滤波器设计。
 - ① 数字频率响应指标转化到模拟频率域；
 - ② 常用模拟滤波器的多项式阶估计；
 - ③ 双线性变换回到数字频率域；

FIR窗函数设计: Butterworth滤波器



- $|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$
- $\Omega = 0$ 最大; Ω_c 是3dB截止频率; 特别 $G(2\Omega) \approx G(\Omega) - 6NdB$ 。
- 由 Ω_c, N 决定。
 $\frac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = 1/(1 + \epsilon^2)$
 $\frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = 1/A^2$;
 $N = \frac{1}{2} \frac{\lg((A^2-1)/\epsilon^2)}{\lg(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\lg k_1}{\lg k}$
- 一般可以写成 $H(s) = \frac{C}{D_N(s)} = \frac{\Omega_c^N}{\prod(s-p_i)}$ 。可以查表或用MATLAB得到。
- 特征: 通带,阻带内单调;

FIR:最佳滤波器

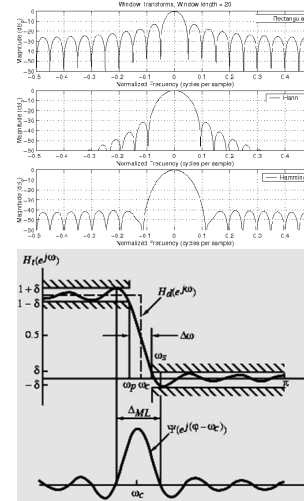
等波纹滤波器 equi-ripple

- 极小极大逼近: 最大错误(通带和阻带)都一样。 $\max_w |Ideal(w) - H(w)|$ 一般用对称滤波器
- 交错定理: d 阶多项式逼近, 至多出现 $d + 2$ 次交错。
- 阶的选定: Kaiser公式 $N = \frac{\alpha_s - 8}{2.285(\Delta\omega)}$ 。
- 算法: Parks-McClellan算法(特别Remez迭代算法)
- MATLAB `firpmord()`, `firpm()`

最小二乘滤波器

- MSL 极小化错误 $R = \int |ideal(w) - H(w)|^2 dw$
- 主要障碍: Gibbs现象:
- 可用Levinson-Durbin 迭代算法。
- MATLAB: `firls()`

常见窗函数



- 矩形窗函数: $\omega[n] = 1$
- Bartlett(三角形): $\omega[n] = 1 - |n|/(M + 1)$;
- Hanning:
 $\omega[n] = 0.5(1 + \cos(2\pi n/(2M + 1)))$;
- Hamming:
 $\omega[n] = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/(2M + 1))$
- Blackman:
 $\omega[n] = 0.42 + 0.5 \cos(2\pi n/(2M + 1)) + 0.08 \cos(4\pi n/(2M + 1))$;
- Ω 的形状参数: 主瓣宽度 Δ_t , 相对旁瓣级 A_d 。
 逼近主瓣宽度,过渡带宽
 $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p \approx \frac{c}{M}$, c 为常数。
 $c = 4\pi, 8\pi, 12\pi \dots$ 一般 δ 是常数。

IIR滤波器设计: 双线性变换

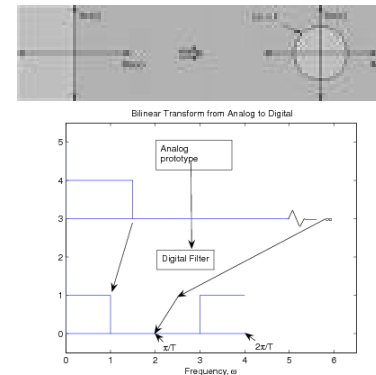
Definition

从模拟频率域到数字频率域的变换
 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
 对应的数字传递函数 $G(z) = H(s)|_{s=**}$

Proposition

- $s = a + bi, z = \frac{1+(a+bi)T/2}{1-(a+bi)T/2}$
- 虚轴映到单位圆; 频率谱一一映射
- 代入 $z = e^{i\omega}$, 频率关系 $\Omega = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega}{2})$

双线性变换一般可以简化: 令 $T = 2$,
 $z = \frac{1+s}{1-s}$ 。



本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- 其他抽样定理(频域,矩形抽样);
- 拉普拉斯变换及其应用;
- 数字滤波器设计的其他方法; (MATLAB中)
- 数字滤波器设计的窗函数选取与比较;
- 交错定理的证明: d 阶多项式逼近, 至多出现 $d + 2$ 次交错。
- *firpm*中 Parks-McClellan算法;
- *firls*中算法;
- 简单的数字滤波器应用;

信号处理的数学方法
aka 信号与系统的数学方法
Mathematical Methods in Signal Processing

张思容

zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

May 15, 2011

回顾

- ▶ 连续信号, 连续时间系统: 傅立叶分析与函数空间
模拟信号处理: 逼近理想滤波器(Butterworth滤波器)
- ▶ 离散信号, 离散时间系统: Z变换 与 复级数
数字信号处理: 构造 $h(n)$, 使得 $H(e^{j\omega})$ 逼近理想滤波器(等波纹滤波器)
- ▶ 有限信号, 矩阵变换: 矩阵基变换 \rightarrow 稀疏矩阵
信号的传递与压缩: 寻找合适信号的合适的基? 小波基。稀疏信号

Chapter 4: 有限信号与稀疏变换 Finite signals and sparse transformation

离散傅立叶变换

DFT

FFT

离散余弦变换

小波变换

Harr小波

滤波器组的构造

小波基和稀疏表示

参考书: 数字信号与图像处理: 第四章

G.Strang: Computational Science and engineering:

从离散信号到有限信号

实际应用中必然是有限的抽样信号: $x(t) \rightarrow x(n) \rightarrow x[M]$

- ▶ 得到有限信号的方法: 截断。
时间域: $x[M] = x(n) \cdot G(N)$, 其中 $G(N)$ 为长为 N 的矩形脉冲。
频率域: $X_N(\omega) = X(\omega) * \text{sinc}(\omega)$;
- ▶ 问题: 卷积产生频率泄漏。
有限信号的频率谱是无穷的!

从有限信号得到离散谱

- ▶ 周期延拓的信号 \rightarrow 离散谱
- ▶ 加零后周期延拓;
- ▶ 对称扩张后周期延拓;

离散傅立叶变换DFT

- ▶ 有限序列 $x[n]$, 傅立叶谱 $X[k]$, 频率 $W_N = e^{-i2\pi/N}$;
- ▶ 离散傅立叶变换(DFT) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$, $k \in [0, N-1)$
- ▶ 离散傅立叶逆变换(IDFT) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$
- ▶ 矩阵表示:

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

- ▶ 变换公式 $X = D_N x$, 逆变换 $x = \frac{1}{N} D_N^* X$.
矩阵是Vandemonde矩阵!

DFT的计算

计算复杂度:

- ▶ 计算所有变换样本要 N^2 个复数乘法, $N(N-1)$ 复数加法。
即 $4N^2$ 个实数乘法, $(4N-2)N$ 实数加法;
- ▶ 计算一个变换样本(常用Goertzel算法:)(线性滤波器方法)
利用 $W_N^{-kN} = 1$, DFT可以写成序列的卷积;
 $X[k] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] W_N^{kl} = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] W_N^{-k(N-l)}$
 $X[k] = y_k[n]|_{n=N}, y_k[n] = \sum_{l=0}^n x[l] W_N^{-k(n-l)}, x_e[n] = x[n], h_k[n] = W_N^{-kn}$ 计
算 $y_k[n] = x_e[n] \otimes h_k[n]$, 即 $Y_k(Z) = \frac{X_e(Z)}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}}$;
递推公式: $y_k[n] = x[n] + W_N^{-k} y_k[n-1], 0 \leq n \leq N$
算法复杂度: $2N$ 个实乘法, $2N$ 个实加法; $X[k], X[n-k]$ 的
对称性;

DFT性质

- ▶ 傅立叶谱 $X[k]$ 是离散的周期谱。(是单位圆上的 N 点抽样)
 N 的选取问题: $x(N)$ 的 N 点DFT与 $x(N)$ 加零后 $2N$ 点DFT差别? 一般依赖与信号的短时平稳性。
- ▶ 对称与共轭: $W_N^k = -W_N^{N/2+k}, W_N^N = 1$
特别实序列有: $X[N-k] = X[k]^*$
- ▶ 周期(或循环)卷积: $x[n] * y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(N-i)$
- ▶ Parseval 等式。

DFT矩阵

DFT矩阵:

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

MATLAB实现 $j = 0 : N - 1; k = j'; F = w. \wedge (k * j)$
 $D = \text{fft}(\text{eye}(N));$

- ▶ 矩阵的列向量是正交的! 为什么? 是某个对称矩阵(二阶差分)的特征向量! 参见DCT部分
- ▶ 例子: $D_4(\delta) = (1, 1, 1, 1), D_4(DC) = \delta$
 $D_4(\sin) = (0, 1/2i, 0, -1/2i)$. 离散余弦变换DCT是实变换!

DFT矩阵分解

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

一般的 $F_{2N} = \begin{bmatrix} I_N & A_N \\ I_N & -A_N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_N & \\ & F_N \end{bmatrix} * [\text{even-odd permutation}]$

其中 A_N 是对角阵 $(1, w, w^2, \dots, w^N)$.

计算量: 只有 N 次对角阵计算!!! 递推有 $cN \log N$ 次运算!

注: 每个矩阵是稀疏矩阵!

FFT的实现

- ▶ 设信号为 c_k , 分解为奇偶 c_k^1, c_k^2
- ▶ 变换有 $f^1 = D_N c^1, f^2 = D_N c^2$;
- ▶ 则计算有 $f_j = f_j^1 + w^j f_j^2, 0 \leq j \leq N-1$
 $f_j = f_j^1 - w^j f_j^2, N \leq j \leq 2N-1$

MATLAB实现

$$f^1 = \text{fft}(c(0 : 2 : 2N - 2)) * N;$$

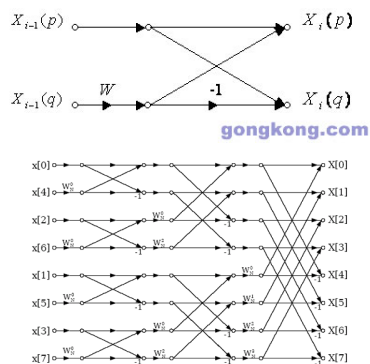
$$f^2 = \text{fft}(c(1 : 2 : 2N - 1)) * N;$$

$$A = w . \wedge (0 : N - 1)';$$

$$f = [f^1 + A .* f^2, f^1 - A .* f^2].$$

例子: D_{1024} 的分解。

不同形式的FFT



- ▶ DIT 按时间抽
取: $X[k] = P(k/2) + W_N^k S(k/2)$
Cooley-Turkey 算法(1965),
Gauss(1805);
注意: 输出的信号顺序即二进制表示的逆序!
- ▶ DIF 按频率抽取 $X[2k] = \sum(x(j) + x(j + N/2)) W^{jk}$; $X[2k+1] = \sum(x(j) - x(j + N/2)) W^{jk}$
- ▶ 基4的算法, 可以不用乘法!
- ▶ FFTW: 参见网站;
- ▶ 应用: 卷积计算(多项式计算);

有限信号模型

离散信号到有限信号?

- ▶ 离散信号FIR系统: $y(n) = \sum_{k=1}^M x(n-k)h(k)$
矩阵表示: $\vec{y} = T\vec{x}$, T 是 Toeplitz 矩阵。
(常对角线矩阵)
- ▶ 周期延拓信号:(DFT) Toeplitz 矩阵 \rightarrow 循环矩阵
- ▶ 加零: 边界频率泄漏?
- ▶ 对称延拓: DCT Toeplitz 矩阵 \rightarrow 特别的对称矩阵

傅立叶变换:

- ▶ 傅立叶变换矩阵 $D_N = (w^{jk})_{N \times N}$, $w = e^{-i2\pi/N}$
记 $v_k = (w^{0k}, w^{1k}, \dots, w^{(N-1)k})$. 则 v_k 为一组正交基;
 D_N 即基变换;
- ▶ 最重要特性: v_k 为所有 Toeplitz 矩阵的特征向量。
- ▶ 有限信号 $D_N \vec{y} = D_N T \vec{x} = \Lambda D_N \vec{x}$

有限信号例子

▶ 二阶差分矩阵 $A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 傅立叶矩阵

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 & j^3 \\ 1 & j^2 & j^4 & j^6 \\ 1 & j^3 & j^6 & j^9 \end{bmatrix}$$

▶ B 的特征根: 0, 0.5, 1, 0.5, 即 FIR 系数的傅立叶变换 $h = (2/4, -1/4, 0, -1/4)$
 $Y = HX$

▶ 二阶平均矩阵 $B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

注意: 有相同的特征向量和相同的特征值!(但顺序不同)

寻找实系数的傅立叶变换?

历史:

- ▶ 连续信号: 实的偶函数的傅立叶变换是实系数的(余弦变换);
- ▶ 离散信号: 直到1974: Rao发现 DCT2 (用于逼近 Karhunen-Loeve 基, 信号压缩)
- ▶ 1985 Wang 给出8种 DCT 形式;
- ▶ 注记: 离散问题比连续问题有更多的复杂性(边界条件)

傅立叶变换矩阵作为差分矩阵的特征向量矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- ▶ v_k 是特征向量, 特征值 $\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{N}$
- ▶ 特别: A_0 是实对称矩阵, 不同特征向量是正交, 可以选取为实特征向量。注意 $\lambda_k = \lambda_{N-k}$.
 $c_k = \text{Re}(v_k) = (1, \cos \frac{2k\pi}{N}, \dots, \cos \frac{2(N-1)k\pi}{N});$
 $s_k = \text{Im}(v_k) = (1, \sin \frac{2k\pi}{N}, \dots, \sin \frac{2(N-1)k\pi}{N});$
- ▶ 不足: c_k 的长度不一样。 $c_0, c_{N/2}$ 是 \sqrt{N} , 其他是 $\sqrt{N/2}$!

有限信号的边界条件

连续信号的边界条件:

- ▶ 连续信号 $[0, \pi]$ 做偶延拓; 微分方程: $u'' = -u$,
- ▶ 零点边界条件: Neumann 条件 $u'(0) = 0$
- ▶ π 点边界条件对应不同特征函数(特征值):
 Neumann 条件 $u'(\pi) = 0 \rightarrow \cos kx$
 或 Dirichlet 条件 $u(\pi) = 0 \rightarrow \cos(k + 1/2)x$

有限信号的边界条件:

- ▶ 差分方程: $A_0 v = -v$
- ▶ 离散对称延拓: 全样本延拓(meshpoint) u_1, u_0, u_1
 半样本延拓(midpoint) u_1, u_0, u_1
- ▶ 两种边界条件, 两种延拓, 两个端点一共有8种 DCT 变换;
 一般: 取两端点的延拓方式一样, 有 DCT1-4;
 不一样有 DCT5-8; (称为 odd DCT) 不常用;

离散余弦变换的差分矩阵 DCT2

$$A_0 = \begin{bmatrix} * & * & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & ** & ** \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ 零点取 midpoint 延拓; $u_{-1} = u_0$
 矩阵第一行为 $(1 - 1 \dots)$;
- ▶ 零点取 meshpoint 延拓; $u_{-1} = u_1$
 矩阵第一行为 $(2 - 2 \dots)$;
- ▶ π 点取 Neumann 条件; 最后一行同上两种可能;
- ▶ π 点取 Dirichlet 条件; 取 midpoint 延拓; $u_N = u_{N-1}$;
 矩阵最后一行: $(\dots - 13)$;
- ▶ π 点取 Dirichlet 条件; 取 meshpoint 延拓; $u_N = 0$;
 矩阵最后一行: $(\dots - 12)$;

特别 DCT2: 两端都取 midpoint 和 Neumann 条件!

离散余弦变换矩阵DCT2

DCT2

- ▶ 特征向量:
 $c_k = (\cos(1/2)k\pi/N, \cos(1/2)k\pi/N, \dots, \cos(N-1/2)k\pi/N)$;
特征值: $2 - 2\cos(k+1/2)\pi/N$;
- ▶ DCT2矩阵元 $(\frac{1}{\sqrt{N}} \cos(j+1/2)k\pi/N), 0 \leq j, k \leq N-1$.
特别是它是正交矩阵!
- ▶ 称其中心(延拓)为 $-1/2, N-1/2$, 长度为 N
- ▶ 计算: 可以用FFT实现;
- ▶ 应用: JPEG压缩; 选取 8×8 图像块, 得到DCT2系数; 压缩(传递), IDCT恢复;
对于有相关性的信号有很好的压缩功能!

寻找更好的基变换?

选取基的主要要求:

- ▶ 计算速度: FFT, FWT
- ▶ 精确逼近: sparse 稀疏信号
- ▶ 正交性: $F^{-1} = (F^T)^*$ 可以没有!

重要例子:

- ▶ 连续光滑信号: 傅立叶基, 问题: Gibbs现象!
- ▶ 有间断点的信号(图像): 小波基
- ▶ 有限元方法: 分段线性多项式;
- ▶ 样条逼近: 分段光滑多项式;
- ▶ 其他基: 微分方程求解 Bessel函数, ...

离散余弦变换矩阵及其他

- ▶ DCT1,3要做正交化(特征向量长度不一样),DCT4可以;
- ▶ DCT5-8的基向量"长度"为 $N \pm 1/2$ 不方便计算; (可以对称扩充)
- ▶ 推广: Malvar的Modulated-lapped变换: 构造相交的覆盖图像块用于图像变换; Dolby AC-3.可用DCT4, 8;
- ▶ 注记: 取不同的差分矩阵, 利用特征向量可以得到新的矩阵, 可能有新的更好的基变换?
- ▶ 基选取依赖于: 数学, 计算, 和信号
视觉信号与小波基的选取是自然的, 人眼看到的是小波!!!

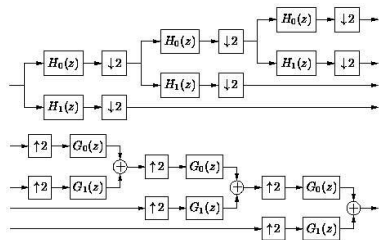
Harr小波

- ▶ 信号: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 4, 5, 1)$
- ▶ 低通滤波器: 移动平均 $y = (x_1 + x_2)/2, (x_3 + x_4)/2$
- ▶ 高通滤波器: 移动差分 $z = (-x_1 + x_2)/2, (-x_3 + x_4)/2$
- ▶ 恢复信号: $y, z \rightarrow x$
- ▶ 可迭代应用滤波器: $yy = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4,$
 $zy = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4$;再恢复信号;
- ▶ 可压缩信号!

小波变换

- ▶ 信号: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
- ▶ 低通滤波器+降抽样: $y = (5, 3)$
- ▶ 高通滤波器+降抽样: $z = (-1, -2)$
- ▶ 迭代应用滤波器+降抽样: $yy = 4, zy = 1$;
- ▶ 得到小波系数 $(4, -1, -1, -2)$
- ▶ 恢复矩阵:

滤波器组与小波变换



$$H = \begin{bmatrix} * & * & & & \\ h_0(0) & h_0(1) & * & & \\ & h_0(0) & h_0(1) & & \\ h_1(0) & h_1(1) & * & & \\ & h_1(0) & h_1(1) & * & \\ * & * & & & \end{bmatrix}$$

- ▶ 信号 → (两通道)解析滤波器组 → 小波系数 (高通滤波器的结果)
小波系数 → 合成滤波器组 → 恢复原信号。
- ▶ 矩阵变换:(其中 h_0, h_1 为 FIR 滤波器系数) $Hx = y$
- ▶ 快速小波变换FWT: 迭代应用解析滤波器, 注意 $H_{1/2}$ 作用在一半长度的信号上。 $\dots H_{1/4} \cdot H_{1/2} \cdot Hx = y$
乘法次数: 达到快速算法的HolyGrail!
($LN + L * N/2 + L * N/4 + \dots$) = $2LN = O(N)$, 其中 L 为滤波器长度, N 为信号长度。
- ▶ 类似合成滤波器组可得逆小波变换!

条件PR: 构造离散小波基

Daubechies: 双正交, 存在 $\widetilde{W} \cdot W = Id$.

设解析滤波器组 h_0, h_1 , 合成滤波器组 f_0, f_1 .

条件PR: $F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-l}$

$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$

- ▶ 因果系统的完全重构等价于频率响应是一个 l 阶延迟, 见方程一。Harr小波延迟为1。
- ▶ 上下抽样产生混叠频率 $w + \pi$, 必须消去等价于方程二。 $e^{i(w+\pi)} = -e^{iw}$
- ▶ 简单选取: $F_0(z) = H_1(-z), F_1(z) = -H_0(-z)$, 定义乘积低通滤波器 $P_0(z) = F_0(z)H_0(z)$, 等价条件: $P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-l}$.
特别: $P_0(z)$ 的多项式的奇数阶系数除 z^{-l} 外都为零。
- ▶ 正规化滤波器(half-band) $P(z) = z^l P_0(z)$, PR条件为 $P(z) + P(-z) = 2$

例子: 5/3滤波器, $h_0 = (-1, 2, 6, 2, -1)/8, f_0 = (1, 2, 1)/2$
 $h_1 = (1, 2, 1)/4, f_1 = (1, 2, -6, 2, 1)/4$.

从Harr小波到其他

从有限矩阵到无穷滤波器

- ▶ Harr小波来源于 DFT_2 , 注意一般的有Walsh变换(矩阵元素全为1, -1)。
- ▶ Harr小波需要用低通, 高通滤波器(无穷维)和上下抽样运算;
- ▶ 信号的边界需要扩张(对称, 加零, 周期);

Proposition (上下抽样的频率响应)

$$(\downarrow 2)(e^{iwn}) = \frac{1}{2}(e^{iwn/2} + e^{i(w/2+\pi)n}), (\uparrow 2)(e^{iwn}) = e^{i2wn}$$

$$\text{特别 } (\uparrow 2)(\downarrow 2)(e^{iwn}) = \frac{1}{2}(e^{iwn} + e^{i(w+\pi)n})$$

附: 小波常用对称扩张, 特别信号的扩张方式(奇或偶扩张)与低通滤波器的对称性一致!

Harr小波是唯一对称, 正交小波。

滤波器设计例子

滤波器组设计: 选取 $P_0(z)$, 选取 H_0 . 得到 H_1, F_0, F_1 .

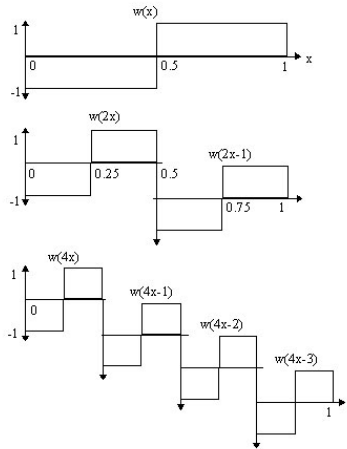
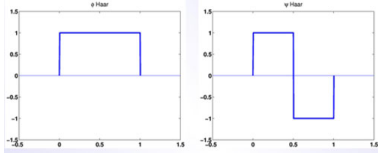
EXAMPLE (maxflat 滤波器)

乘积滤波器 $P_0(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6})$ 6个零点: 4阶 $z = -1$, 及 $c = 2 + \sqrt{3}, 1/c$

- ▶ 2/6滤波器或(6/2): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})/z, \frac{1}{2}(1, 1), \frac{1}{8}(-1, 1, 8, 8, 1, -1)$
- ▶ 3/5滤波器或(5/3): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})^2/z^2, \frac{1}{4}(1, 2, 1), \frac{1}{4}(-1, 2, 6, 2, -1)$
- ▶ 4/4正交滤波器(Daubechies): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})^2(c - z^{-1})/z^3, \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}), \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

注意: 一般取 H_0 系数和为1, F_0 的系数和为2. 常用5/3, 6/2滤波器。特别JPEG2000使用9/7, 5/3滤波器。

傅立叶变换VS 小波变换



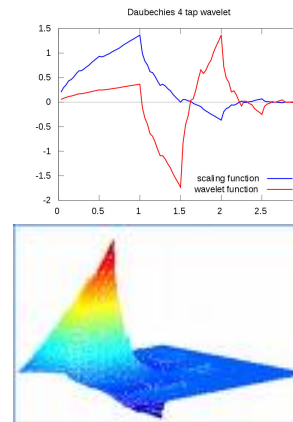
- ▶ 连续信号: 傅立叶基 $\cos t, \sin t \rightarrow w(t), \phi(t)$
- ▶ 傅立叶变换: 时间到频率域, 小波变换: 时间域到 多尺度分解(局部时频信号)
- ▶ **Harr小波**: (解见图像)
平均: $\Phi(t) = \Phi(2t) + \Phi(2t-1)$
细节: $w(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$
迭代有: $w_{jk}(t) = 2^j w(2^j t - k)$
- ▶ 小波基的优点: 局部基, 可加细(refine), 快速, 有限逼近(!!). 有限元和样条函数仅实现前三条.

离散小波基的构造

利用 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi(2t-k)$, 构造 h_0 , 求解 $\phi(t)$,
 ***从而可得 h_1 , 以及合成滤波器组的低通, 高通滤波器 f_0, f_1 .
 基本问题:

1. 存在性: 尺度方程有解的充分条件(条件E)
泛函分析: 等价于 $\phi(t-k)$ 是一组稳定基(Riesz basis).
2. 精确逼近: 有限项逼近的充分条件(条件 A_p)
3. 完全重构(双正交基): 存在合成滤波器组 Perfect Reconstruction (条件PR)
4. (***) 正交基: 条件O

L^2 空间的小波基与尺度方程



- ▶ L^2 函数的小波分解:
 $f(t) = \sum a_k \phi(t-k) + \sum \sum b_{jk} w_{jk}(t)$
- ▶ 尺度方程(refinement equation)
 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi(2t-k)$
小波方程 $w(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_1(k) \phi(2t-k)$
注意: h_0, h_1 即滤波器系数!
- ▶ 尺度方程的解: 简单形式即B样条函数(Harr小波的复合) 一般连续形式的解很复杂, 见Daubechies 小波1D解和2D解。
- ▶ 小波空间的分解: $V_0 = \{\sum a_k \phi(t-k)\}$,
 $W_0 = \{\sum c_k w(t-k)\}$,
 $V_1 = \{\sum b_k \phi(2t-k)\}$.
尺度方程+小波方程 $\rightarrow V_0 + W_0 = V_1$,
依次有 $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_\infty = L_2$
- ▶ 一般用滤波器实现离散小波变换!

条件E和条件 A_p

条件E: $T = 2(\downarrow 2)H_0H_0^T$ 的所有特征根 $\lambda < 1$, 除一个简单特征根为1

- ▶ Cascade算法: $\phi^{i+1}(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi^i(2t-k)$
 $\phi^0(t)$ 可取 $[0, 1]$ 上矩形波。定理: $\phi(t)$ 的紧致支集为 $[0, L]$. 参见 cascade.m
- ▶ 例子: 收敛 $h_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \rightarrow$ hat函数
Daubechies: $h_0 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$
不收敛: $h_0 = (2/3, 1/3)$
- ▶ 必要条件: 频率响应 $H_0(\pi) = 0$, 过滤AC信号!

条件 A_p : $M = (\downarrow 2)2H$ 有 p 个特征根 $1, 1/2, \dots, (1/2)^{p-1}$.

- ▶ f 的 p 阶逼近: 任一 f 与其投影到小波空间 V_p 中像的误差充分小。
即 $|f(t) - \sum a_{jk} \phi_{jk}(t)| \leq C 2^{-jp} |f^{(p)}(t)|$
- ▶ 等价条件1: 频率响应 $H_0(z)$ 有一个 p 阶零点在 $z = e^{i\pi}$.
等价条件2: $\sum_{k=0}^L (-1)^k k^m h(k) = 0, m = 0, 1, \dots, p-1$

$f(t) \approx \sum c_k \phi_k(t)$: 针对不同信号怎样寻找合适的基?

- ▶ 线性变换: 选取前 N 个系数: (使用傅立叶基或小波基)
- ▶ 非线性变换: 选取前 N 个最大的系数: 正交搜索(basis pursuit)
- ▶ 稀疏变换: 极小化能量 $\|f - \sum c_k \phi_k\| + \alpha \sum |c_k|$ (Lasso)
注意: 稀疏表示要求 l_0 范数小, 但用 l_1 范数更好算,
且Donoho等证明: 概率意义下, 用 l_1 范数找到的是正确的。
- ▶ 光滑表示: 极小化能量 $\|f - \sum c_k \phi_k\| + \alpha \|\sum c_k \phi_k\|_{TV}$
Total Variation 范数常用于图像处理。

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- ▶ 基为4或其他的FFT变换;
- ▶ FFT的应用;
- ▶ DCT4或其他类型的DCT变换;
- ▶ JPEG的DCT算法简介;
- ▶ 简单小波(B样条)的例子和应用;
- ▶ JPEG2000的DWT算法简介;
- ▶ 图像降噪的小波方法;

信号处理的数学方法
aka 信号与系统的数学方法
Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

May 26, 2011

真实世界的信号处理

真实信号=理想信号+噪音信号= $x(t) + e(t) \rightarrow h(n) \rightarrow x(t)$ 恢复信号

- ▶ 真实信号: 包含不确定性, 不可完全预期其值。
信号表示: (离散)随机过程。含时间变量的随机变量 $x(t, \xi)$
理想信号: 函数空间表示; L^2
噪音信号: 最简单是白噪音随机过程(完全不可预期);
常见噪音: 电线交流电噪音60赫兹, 图像的椒盐噪音等等;
- ▶ 统计信号处理: 信号的平均的统计特征是确定的, 可以利用统计数据统计量估计信号的统计特征。
主要内容: 信号分析(谱估计)
信号滤波(线性滤波Wiener滤波器, 最小二乘, 自适应滤波, Kalman滤波).
应用: 语音处理, 去噪, 信号预测, 识别等。

随机信号模型

随机信号
谱分解与ARMA模型
模型的参数和估计

最小二乘与滤波器算法实现

最小二乘与滤波器
最小二乘的递推算法举例
维纳滤波器的Levinson算法

参考书:

张旭东等: 离散随机信号处理, 清华大学出版社。2005
G.Strang: Computational Science and engineering:

随机变量

Remark (随机变量)

- ▶ 概率空间: (X, S, P)
- ▶ 随机变量是一个映射: $x: X \rightarrow R$, 使得 $\{x(\xi) < a\}$ 是个事件(可测集);
- ▶ CDF分布函数: $F_x(a) = Pr(x(\xi) < a)$ PDF密度函数 $f_x(a) = F'(a)$

Remark (随机向量)

- ▶ M 维随机向量: $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$
- ▶ CDF分布函数: $F_{\text{bar}x}(\bar{a}) = Pr(x_i(\xi) < a_i, 1 \leq i \leq M)$
PDF联合密度函数 $f_x(\mathbf{a}) = \partial_{x_1} \dots \partial_{x_M} F(\mathbf{a})$
- ▶ 边际密度函数: $f_{x_i} = \int \dots \int f_x(\mathbf{a}) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_M$.
独立随机变量: $f_{x_1, x_2}(a, b) = f_{x_1}(a) f_{x_2}(b)$

随机变量的特征

Remark (统计特征)

- ▶ 期望: $E(x) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} af_x(a)da$
- ▶ 方差: $\sigma_x^2 = \text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (a - \mu_x)^2 f_x(a)da$
标准方差: σ_x ;
- ▶ moments: $r^m = E((x - \mu_x)^m) = \int_{-\infty}^{\infty} (a - \mu_x)^m f_x(a)da$ 高阶矩。
三阶矩: skewness 倾斜率, 四阶矩: kurtosis 峰度
特征函数: $\Phi_x(s) = E(e^{xs}) = \int f_x e^{sa} da$

EXAMPLE

- ▶ 均匀分布: $f_x(t) = 1/(b - a), a \leq t \leq b, \mu_x = (b + a)/2,$
 $\sigma_x = (b - a)^2/12$
- ▶ 高斯分布: $f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$

离散随机过程

Definition (离散随机过程)

给定样本空间 $X = \{\xi_k\}$, 取一系列数 $x(n, \xi_k)$ 称为离散随机过程或离散随机序列。

固定 n , $x(n, \xi_k)$ 是一个随机变量; 固定 ξ_k , $x(n, \xi_k)$ 是一个样本序列;

Proposition (描述)

- ▶ 联合概率分布: $F(x_1, \dots, x_M; n_1, \dots, n_m) = Pr(x(n_i) \leq x_i, 1 \leq i \leq M)$
- ▶ 统计特征: $\mu(n) = E(x(n)), \sigma(n)$;
- ▶ 自相关矩阵: $r(n_1, n_2) = E(x(n_1)x(n_2))$
自协方差矩阵: $\gamma(n_1, n_2) = r(n_1, n_2) - \mu(n_1)\mu(n_2)$

IID: 互相独立的随机过程; 不相关过程; 正交过程; 周期过程;

相关矩阵

Remark (随机向量统计特征)

- ▶ 期望向量: $\mu_x = (\mu_1, \dots, \mu_M)$
- ▶ 自相关矩阵: $R_x = E(\bar{x}(\xi)\bar{x}'(\xi)) = [r_{ij}]$
自协方差矩阵: $\Gamma_x = E(x - \mu_x)(x - \mu_x)' = \gamma_{ij} = R_x - \mu_x \mu_x'$
- ▶ 互相关矩阵: $R_{xy} = E(\bar{x}(\xi)\bar{y}'(\xi)) = [r_{ij}]$
互协方差矩阵:
 $\Gamma_{xy} = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)' = \gamma_{ij} = R_{xy} - \mu_x \mu_y'$

Proposition (相关性)

x, y 是不相关的如果 $\Gamma_{xy} = 0$

x, y 是正交的, 如果 $R_{xy} = 0$

x, y 是独立的, 如果 $f_{x,y}(a, b) = f_x(a)f_y(b)$

平稳随机信号

随机过程 $x(n)$ 与 $x(n+k)$ 的统计量相同。

Definition (SSS严格平稳信号)

如果联合分布密度函数满足: 任何 k 成立

$$f(x_1, \dots, x_M; n_1, \dots, n_m) = f(x_1, \dots, x_M; n_1+k, \dots, n_m+k)$$

p 阶矩平稳(与时间无关), 一般 $p = 2$

Definition (WSS宽平稳信号)

随机信号满足,

1. $\mu(n) = \mu_x$
2. $\text{var}(x(n)) = \sigma_x^2$
3. $r_x(n_1, n_2) = r(|n_1 - n_2|) = r(k)$, 称为自相关序列。

平稳信号自相关序列

Proposition

- ▶ $r_x(0) = \sigma_x^2 + |\mu_x|^2 \geq r_x(k)$
- ▶ $r_x(k) = r_x^*(-k)$
- ▶ 非负定 $\sum_k \sum_m a_k r(k-m) a_m^* \geq 0$

Remark (其他平稳条件)

- ▶ 渐进平稳: $x(n) \sim x(n+k), k \rightarrow \infty$
- ▶ 增量平稳: $x(n) - x(n+k)$ 平稳;
- ▶ 遍历性: 有限时间的平均统计的极限等于期望值
 $E(x(n)) = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i)$
 $E(x(n)x^*(n-k)) = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i)x^*(i-k)$

典型例子

EXAMPLE

$x(n) = A \cos(w_0 n + \phi) + v(n)$, 其中 A 是正常数, ϕ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布随机变量, $v(n)$ 服从独立的高斯分布 $N(0, \sigma^2)$.

计算有:

$$E(x(n)) = 0$$

$$r(n_1, n_2) = \frac{1}{2} A^2 \cos(w_0(n_1 - n_2)).$$

特别自相关矩阵是 Toeplitz 矩阵!

$$S(w) = \sigma^2 + 2\pi A^2 \sum \delta(w - w_0 - 2\pi k)$$

功率谱

Definition (功率谱密度)

已知平稳信号 $x(n)$ 的自相关序列 $r(k)$, 定义随机过程的功率谱 PSD: $S(e^{i\omega})$ 为 $r(k)$ 的离散时间傅立叶变换。称为功率谱密度。有离散时间傅立叶逆变换可以得到 $r(k)$.

$$Z\text{变换: } S(z) = \sum_n r(k) z^{-k}$$

注记: 一般信号的离散时间傅立叶变换(频率谱)是随机非平稳的白噪声!

Proposition

- ▶ 功率谱密度周期为 2π 的实函数;
- ▶ 非负定 $S(e^{i\omega}) \geq 0$
- ▶ 信号的平均功率: $P(x[n]) = E(x^2[n]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{i\omega}) d\omega$

白噪声: $w(n) \sim WN(\mu, \sigma^2)$

$$r(k) = \sigma^2 \delta(k), S(e^{i\omega}) = \sigma^2.$$

LTI系统作用于平稳信号

Theorem (存在性)

给定 $x(n, \xi)$ 是有限期望的平稳随机过程, 通过 BIBO 稳定 LTI 系统 $h[k]$, 得到 $y(n, \xi) = \sum_k h[k] x[n-k; \xi]$ $y(n, \xi)$ 按概率 1 收敛, 且如果 $x(n, \xi)$ 方差有限, 则输出也是方差有限, 且它是平稳随机过程。

LTI 系统的系统响应: 时间域

- ▶ 输出期望 $\mu(y[n]) = \mu(x[n]) H(e^{i0})$
- ▶ 互相关系数 $r_{xy}(k) = h(-k) * r_{xx}(k)$
- ▶ 自相关系数 $r_y(k) = r_h(k) * r_x(k)$, 其中 $r_h(k) = h(n) * h(n-k)$, 为系统的相关序列。特别输出功率 $P_y = r_y(0) = \sum_k r_h(k) r_x(k)$.

LTI 系统的系统响应: 频率域

- ▶ z 变换 $S_y(z) = H(z) H(1/z) S_x(z)$
- ▶ 自功率谱 $S_y(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})|^2 S_x(e^{i\omega})$
- ▶ 自功率谱只能得到系统的幅度响应, 不能得到相位响应。

谱分解定理***

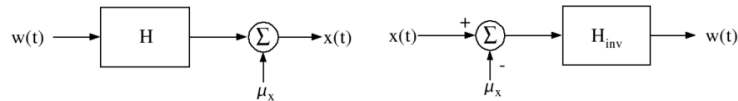
Definition (正则随机信号)

如果平稳随机信号满足Paley-Wiener条件称为正则的;
即 $\int_{-\pi}^{\pi} |\ln S(\omega)| d\omega < \infty$

Theorem (谱分解**)

如果平稳随机信号是正则的, 必有分解
 $S(z) = \sigma^2 Q(z) Q^*(1/z^*)$, 即 $S(\omega) = |Q(e^{j\omega})|^2 \sigma^2$
其中 $Q(z)$ 是最小相位系统。

任一平稳信号和白噪音信号可以通过一个可逆最小相位系统互相得到。



ARMA模型

Definition (ARMA方程)

如果平稳随机信号满足
 $x(n) = -\sum_k^p a(k)x(n-k) + \sum_k^q b(k)w(n-k)$, 其中 $w(n)$ 是白噪音输入; 称为ARMA(p,q)过程。自回归移动平均模型。

设系统函数 $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

例子:

- ▶ MA模型 即ARMA(0,q)模型, $x(n) = \sum b(k)v(n-k)$, 全零点模型。
正则的平稳随机过程: 清辅音(不用声带振动的语音), 连续的功率谱和
- ▶ AR模型: 即ARMA(p,0)模型, $x(n) = \sum a(k)x(n-k) + w(n)$, 全极点模型。
可预测过程, 元音及含声带振动的辅音, 拟周期性; 离散的功率谱

混合过程

Remark

平稳信号含有连续的功率谱和离散的功率谱(谐波信号), 称为混合信号。

Theorem (Wold分解定理)

任一平稳过程 $x(n)$ 可以写成 $x(n) = x_r(n) + x_p(n)$, 其中 $x_r(n)$ 是正则过程, $x_p(n)$ 是离散谱的可预测过程。且 $E(x_r x_p) = 0$ (正交)。
 $r_x(k) = r_r(k) + r_p(k)$, 可以写成 $x_r(n) = \sum_k b_k v(n-k)$ (MA(∞)过程)。
 $x_p(n) = -\sum_k a(k)x(n-k)$ 。

Theorem (Kolmogorov定理)

任一ARMA过程可以用无穷阶AR过程表示。

Yule-Walker方程

AR(p)模型 $\sum_{k=0}^p a_k x(n-k) = w(n)$

两边同时乘以 $x^*(n-m)$, 取期望

$$E[\sum_k a_k^* x(n-k)x^*(n-m)] = E[w(n)x^*(n-m)]$$

由因果性 $w(n)$ 与 $x(n-m)$ 不相关; $m=0; \sigma_w^2 = \sum a_k r(k)$

$m>0; \sum_{k=0}^p a_k^* r(m-k) = 0$

$R_x \vec{a} = -\vec{r}$ 为Yule-Walker方程。

$\vec{a} = (a_1, \dots, a_p), \vec{r} = (r^*(1), \dots, r^*(p))$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(p-1) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(p-1) & r^*(p-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(p) \end{pmatrix}$$

模型参数计算

增广方程: $R_{p+1}a_p = \sigma_w^2 u$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(p) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(p) & r^*(p-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

利用 $r(0), \dots, r(p)$ 可以求出 a_p 和 σ_w^2 .

实际中应用观测值估计 R , 求参数。

注意: ARMA, MA 模型对应的求参数方程是非线性的!

矩估计

- ▶ 无偏均值估计: $\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum x(n)$
白噪声过程方差: $\text{Var}(\hat{\mu}_x) = \sigma_x^2 / N$
一般过程: $\text{Var}(\hat{\mu}_x) = \frac{1}{N} \sum (1 - \frac{|k|}{N}) c_x(k)$, c_x 为 x 的协方差函数。
- ▶ 有偏方差估计: $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum (x(k) - \hat{\mu}_x)^2$
白噪声过程方 $E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{N}{N-1} \sigma_x^2$, 渐近无偏。
一般过程: $\text{Var}(\hat{\sigma}_x^2) \approx \frac{c_x^4}{N}$, c_x^4 是 x 的四阶中心矩。
- ▶ 自相关估计
$$\hat{r}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x^*(n-k) & 0 \leq k \leq N-1 \\ \hat{r}_x(-k) & -(N-1) \leq k < 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

渐近无偏; 自相关矩阵是半正定; 方差趋于零(一致估计);

EXAMPLE (简单随机过程)

$x(n) = A + w(n)$, $w(n)$ 是 $WGN(0, \sigma^2)$ 白噪声。估计 A 。

估计问题

给定数据 $x(0), x(1), \dots, x(n-1)$, 利用随机变量估计确定参数 $\theta := \hat{\theta} = g(x(0), \dots, x(n-1))$ 。

- ▶ 估计器的性能? 与真实值得差距?
- ▶ 是否最优? 怎样找到最优估计?

Definition (估计分类)

- ▶ 估计器的性能:
 - ▶ 无偏估计: $E(\hat{\theta}) = \theta$
 - ▶ 渐进无偏: $n \rightarrow \infty, \lim E(\hat{\theta}) = \theta$
 - ▶ 有偏估计: $b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$
- ▶ 最优准则:
 - 均方误差准则(MSE): $mse(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$
 - 一致估计: $n \rightarrow \infty, mse(\hat{\theta}) \rightarrow 0$.

理想估计器: 最小方差无偏估计器(MVU)

线性波形估计: Wiener 滤波器

EXAMPLE

已知信号 $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$, 估计信号 $y(n)$ 。

设 $\hat{y}(n) = H(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 为一个估计信号。

误差信号 $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ 。

特别有线性估计, H 是线性函数。

Remark (最佳估计器)

误差 $e(n)$ 满足一定准则的估计器。

一般正负同样重要, $|e(n)|, |e(n)|^\alpha$ 。

重要: MMSE 最小均方平方误差 $L(n) = E[|e(n)|^2]$ 。

Gauss 19 世纪发展;

Wiener 和 Kolmogorov 最佳滤波; Kalman 等进一步发展;

例子

EXAMPLE (array signals)

阵列信号处理: $x_k(n)$ 是空间信号, $y(n)$ 是某个方向待估计信号。

EXAMPLE (信道均衡)

$y(n) = s(n) + e(n)$, 构造滤波器 $\hat{y}(n) = y(n) * h(n) = s(n)$.

EXAMPLE (linear predictor)

线性预测: $y(n) = x(n)$, 由 $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-k)$ 估计。
向前预测及向后预测。

EXAMPLE (inverse system)

逆系统: LTI系统 $\hat{y}(n) = h(n) * x(n)$, 误差 $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ 。

线性均方误差估计

Definition (LMMSE)

设 $\hat{y}[n] = \sum c_k[n]x_k[n]$, 即 $\hat{Y} = C^T X$,
即 X 是数据向量 x_1, x_2, \dots, x_k , C 是系数向量。

Definition (误差曲面)

误差准则 $P = E(|e|^2) = E(|\hat{y} - y|^2)$,
 $P(C) = E((C^T X - y)^2) = E|y|^2 - C^T d - d^T C + C^T R C$,
其中 $d = E(xy)$, $R = E(xx^T)$, $P(C)$ 称为估计的误差性能曲面。

当 R 正定时有唯一最小解。如果使用有理系统, 误差性能曲面可能非二次曲面。

法方程

Remark (求解过程)

配方法 $P(C) = E|y|^2 - C^T d - d^T C + C^T R C$
 $P(C) = E(y^2) - d^T R^{-1} d + (RC - d)^T R^{-1} (RC - d)$, 如果 R 正定,
取得最小值的充要条件 $RC_0 = d$; $P_{\min} = P_y - d^T C_0$.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{kk} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}; r_{ij} = E(x_i x_j); d_i = E(x_i y)$$

以上称为法方程。

Corollary (正交性)

法方程的解满足: 估计误差 e_0 和 x 正交。 $E(xe_0) = 0$. 特别 $E(\hat{y}e_0) = 0$.

Wiener-Hopf 方程

Remark

最优FIR滤波器: 利用输入信号 $x[n]$ 的样本, 估计期望信号 $y[n]$,
特别有线性估计 $\hat{y}[n] = \sum_{m=1}^M h[n, k]x[n-m] = C^T[n]X[n]$
对应LTI系统, $C[n]$ 与时间无关, 是常数!

Proposition (平稳过程最优FIR滤波器)

记 R 为自相关矩阵 (Toeplitz), $r_k = E(x[n]x[n-k])$, 互相关矢量 $d = [d_i] = (r_{yx}(i))$; 设LTI系统系数 $H[k]$,

Wiener-Hopf方程: $\sum_{k=0}^{k=M} h[k]r(n-k) = r_{yx}(n) = d_n$.

$$MMSEP(C_0) = P_y - \sum h[k]r_{yx}(k)$$

Remark

一般不用最优IIR滤波器, IIR可以由FIR逼近; FIR的方程是线性方程!

最优线性预测滤波器***

- ▶ 线性预测: 利用信号其他样本(时间)来估计某一时刻的信号值。
前向预测: 令 $y[n] = x[n]$, $x_k[n] = x[n - k]$, $1 \leq k \leq M$,
记 $\hat{y} = x(n|X_{M-1})$,
后向预测:
令 $y[n] = x[n - M]$, $x_k[n] = x[n - M + k]$, $1 \leq k \leq M$,
记 $\hat{y} = x(n - M|X_n)$,
- ▶ 前向预测方程: R 自相关矩阵, $d_k = r_{x_{n-k}y} = r(-k)$;
Wiener-Hopf方程: $Rh_0 = \vec{r}$
MMSE $P_0 = r(0) - d^T h_0$.
- ▶ 后向预测方程: R 自相关矩阵, $d_k = r_{x_{n+1-k}y} = r(M + 1 - k)$;
Wiener-Hopf方程: $Rh_0 = \vec{r}^B$
MMSE $P_0 = r(0) - \vec{r}^B h_0$.

滤波器的设计实现

Remark (设计)

1. 求解法方程。得到系数 C ;
 2. 计算 $MSE P(C)$, 验证满足设计要求;
 3. 计算估计值 \hat{y} ;
- ▶ 法方程求解可用任何算法, 但实用中可用更有效算法;
 - ▶ 阶数固定算法 vs 阶数递归算法
 - ▶ 已知信息是二阶矩; 特别有时不变系统, 二阶矩为常数!

Remark (算法效率)

- ▶ Gauss消去法: $O(M^3)$
- ▶ LDU分解: $O(M^2)$
- ▶ Levinson递归算法: $O(M^2)$ 包含所有低阶估计; 我们记 m 阶估计 \hat{y}_m ; 对应系数 \vec{C}_m , 矩 \vec{d}_m .

Wiener-Hopf 方程和Yule-Walker 方程

- ▶ 前向预测误差滤波器 $e(n) = x(n) - \sum h[k]x[n - k]$
Wiener-Hopf方程: $Rh_0 = \vec{r}$
- ▶ AR(p)模型系数计算 $\sum_{k=0}^p a_k x(n - k) = w(n)$;
 $R_x \vec{a} = -\vec{r}$ 为 Yule-Walker 方程。
- ▶ Wiener-Hopf 方程和 Yule-Walker 方程的一致性。
增广方程: $R_{p+1} a_p = \sigma_w^2 u$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(p) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(p) & r^*(p-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
- ▶ 滤波器算法的实现关键是求解以上方程!

实用滤波器

- ▶ Wiener滤波器是理想滤波器。已知条件: 信号的二阶矩 R 以及信号与目标的相关系数 r_{dx} .
- ▶ 最小二乘滤波器: 宽平稳过程, 已知 $x(n)$, $d(n)$, 估计 R, r_{dx} .
LS滤波器的法方程为 $\hat{R}\vec{C} = \vec{r}_d$, 最小能量 $E = E_y - \vec{r}_d^T C$.
其中 $\hat{R} = \vec{X}^T \vec{X}$, $\vec{r}_d = \vec{X}^T d$.
- ▶ 自适应滤波器: 非宽平稳过程, 已知 $x(n)$, $d(n)$,
时变线性方程 $A_t w_t = D_t$, 能量(最小二乘) $E = |Aw - D|^2$,
一般可用迭代算法计算 $w_{t+1} = w_t - \Delta E$, 比如 Newton 方法。
自适应滤波器是学习过程, 收敛足够快, 从而可改变滤波器系数, 适应不同环境。
- ▶ Kalman滤波器: 非宽平稳过程, 时变线性方程 $D_t = A_t w_t + b$, 且有状态方程 $w_{t+1} = Fw_t + c$, 其中 b, c 是噪音或误差。
一般可用迭代算法: Kalman滤波器算法(比较繁琐, 略去). 与自适应滤波器存在对应。

以上算法的实现依赖于应用线性代数中的基本结果。

应用线性代数的矩阵分解

线性代数基本问题: $Ax = b$ 求解, $Ax = \lambda x$ 求特征根。

快速算法的基础: 矩阵分解

- ▶ $A = LU$: 下三角矩阵和上三角矩阵的乘积;
高斯消去法 $(L, U) = lu(A)$;
- ▶ $A = QR$ 正交矩阵和上三角矩阵的乘积;
Gram-schmidt 正交化;
Household 变换: $H = I - 2uu^T$ 是正交矩阵, 是以 u 为法向量的平面进行反射的矩阵变换。
一般 MATLAB $qr(A)$ 用第二种(更稳定);
- ▶ $A = U\Sigma V^T$ SVD 分解, U, V 正交矩阵,
设 $rank(A) = r, \Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$
注意: $A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i, A A^T u_i = \sigma_i^2 u_i, \sigma_i$ 称为奇异值。
Matlab: $svd(A), svd(A, 0)$ 。
特别有 $A = \sum u_i \sigma_i v_i^T$, 矩阵由若干向量的乘积完全决定,
称 u_i, v_i 为 Karhunen-Leove 基(特别对称矩阵 $u_i = v_i$)。
可应用于 PCA, 图像压缩等等(但速度慢!)

一般的递推算法

EXAMPLE

设 $Ac = d$, 已知 $A_{old} c_{old} = d_{old}$, 增加新数据 A_{new}, d_{new} (一行)。可以得到 $c_{new} = c_{old} + (A^T A)^{-1} A_{new}^T (d_{new} - A_{new} c_{old})$ 。

- ▶ $A^T = [A_{old}^T \ A_{new}^T], D^T = [d_{old}^T \ d_{new}^T]$
- ▶ 最小二乘解(伪逆); $A^T A c = A^T D, c = (A^T A)^{-1} A^T D$
- ▶ 代入直接求解即可。
- ▶ $(A^T A)^{-1} A_{new}^T$ 称为增益因子(gain factor), 通常记为 K (Kalman), 一般是矩阵! $(d_{new} - A_{new} c_{old})$ 称为更新(innovation)!

简单例子

EXAMPLE

估计一个信号的均值 μ , 已知信号 x_1, x_2, \dots, x_{99} , 可以定义 $\mu = \sum x_i / 99$, 新得到一个样本 x_{100} , 则新估计为 $\mu_{new} = \sum x_i / 100$

- ▶ 线性方程为 $A\mu = X$, 其中 $A = (1, 1, \dots, 1)^T, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。
- ▶ 最小二乘解(伪逆); $A^T A \mu = A^T X, \mu = (A^T A)^{-1} A^T X$
特别这里 $A^T A = 99$. 验证估计是正确的;
- ▶ 希望不直接解方程, 利用 old 解得到新的解
 $\mu_{new} = \mu_{old} * 99/100 + x_{100} * 1/100$
!!! $\mu_{new} = \mu_{old} + 1/100(x_{100} - \mu_{old})$
1/100 称为增益因子(gain factor), $(x_{100} - \mu_{old})$ 称为更新(innovation)!

Kalman 滤波器的简单例子

EXAMPLE

估计一个病人的心跳 u , 已知信号 x_1, x_2 , 可以定义 $u = \sum x_i / 2$, 如果有心跳随时间增加变慢即 $u_2 - u_1 = \alpha$, 应该如何估计?

- ▶ 线性(时变)方程为 $A(u_1 u_2) = X$, 其中 $A = (1, 1)^T, X = (x_1, x_2)^T$ 。
- ▶ 增加有状态方程 $u_2 - u_1 = \alpha$,
- ▶ 组合三个方程, 得到新的线性方程组 $A_* u = X$
最小二乘解(伪逆); $A_*^T A_* u = A_*^T X, u = (A_*^T A_*)^{-1} A_*^T X$
可以直接求解 有 $u_2 = (x_1 + 2x_2 + \alpha) / 3, u_1 = (2x_1 + x_2 - \alpha)$ 。
- ▶ 递推求解: 关键每一步递推包含两步!
状态方程预测: $u_{n+1|n} = F u_{n|n} + \alpha$
校正方程: $u_{n+1|n+1} = u_{n+1|n} + K(x_n - A u_{n+1|n})$
- ▶ 一般 k 非常复杂, 涉及矩阵的逆(参见 Woodbury-Morrison 矩阵逆公式);
- ▶ 时间变化会改变已有估计! 应该还有光滑过程, 即 $u_{n|n+1}$ 会发生变化, 要有新的递推过程。

特例：前向预测误差滤波器

m 阶Wiener-Hopf方程: $R_m \vec{h}_m = \vec{r}_m$

增广方程: $R_{m+1} \vec{a}_m^T = (P_m, \vec{0})^T, \vec{a}_m = (1, \vec{h}_m)^T$.

求解 $m+1$ 阶增广方程

- ▶ 利用 R_{m+2} 的Toeplitz性质有两个分解

$$R_{m+2} = \begin{bmatrix} R_{m+1} & \vec{r}_{m+1} \\ \vec{r}_{m+1}^T & r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \vec{r}_{m+1}^T \\ \vec{r}_{m+1} & R_{m+1} \end{bmatrix}$$

- ▶ 注意到向前, 向后预测 m 阶方程的解是倒序关系:

$$R_{m+1} (\vec{a}_m^B)^T = (\vec{0}, P_m)^T$$

- ▶ 令 $\vec{a}_{m+1} = (\vec{a}_m, 0)^T + k_{m+1} (0, \vec{a}_m^B)^T$

代入 $m+1$ 阶方程,

有 $(P_{m+1}, \vec{0}_m) = (P_m, \vec{0}_{m-1}, \delta_m) + k_{m+1} (\delta_m, \vec{0}_{m-1}, P_m)$ 其

中 $\delta_m = r_{m+1}^B \vec{a}_m$.

仅有两个方程 $P_{m+1} = P_m + k_{m+1} \delta_m, \delta_m = -k_{m+1} P_m$

即 $k_{m+1} = -\delta_m / P_m, P_{m+1} = (1 - k_{m+1})^2 P_m$.

- ▶ 称 k_m 为 m 阶反射系数, δ_m 为偏相关系数。

Levinson-Durbin 算法

m 阶Wiener-Hopf方程: $R_m \vec{h}_m = \vec{r}_m$

增广方程: $R_{m+1} \vec{a}_m^T = (P_m, \vec{0})^T$.

1. 输入 $r(0), r(1), \dots, r(m)$;
2. 初始化: $P_0 = r(0), \delta_0 = r(1), k_0 = -\delta_0 / P_0, a_1 = k_0$
3. m 依次增加; 计算 $P_m = P_{m-1} + \delta_{m-1} k_{m-1}$,
 $\vec{r}_m = (r(1), r(2), \dots, r(M))^T$,
 $\delta_m = r_{m+1}^B \vec{a}_m$,
 $k_m = -\delta_m / P_m$,
 $\vec{a}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_m^B \end{bmatrix} k_m$;
4. 验证 $P_{m+1} = P_m + \delta_m k_m$ 是否满足条件
5. 输出 \vec{a}_m, k_m, P_m .

Levinson算法

解决任一 \vec{d}_m 的情形, 一般称为Levinson算法;

一般的Levinson算法分解为两部分: 一部分递归线性预测 \vec{a}_m

(Levinson-Durbin 算法); 另一部分递归计算最优滤波器(系数);

1. 输入: $\vec{r}_m, \vec{d}_m, P_y$
2. 初始化: $P_0(c) = P_y, \delta_0(c) = d_1, k_0(c) = -\delta_0(c) / P_0(c), c_1 = k_0(c)$
3. Levinson-Durbin 计算: $\vec{a}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_m^B \end{bmatrix} k_m$;
4. 计算系数: $\delta_m(c) = -\vec{c}_m^T \vec{r}_m^B + d_{m+1}, k_m(c) = \delta_m(c) / P_m(c)$
 $\vec{c}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{c}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{c}_m^B \end{bmatrix} k_m(c)$;
5. 验证 $P_{m+1}(c) = P_m(c) + \delta_m(c) k_m(c)$ 是否满足条件
6. 输出 $\vec{c}_m, k_m(c), P_m(c), \vec{a}_m, k_m, P_m$.

一般可以构造特别的格式结构利用Cholesky分解直接实现算法;

$R_m^{-1} = L_m D_m^{-1} L_m^T$, 其中 L_m 由Levinson-Durbin得到的下三角系数 $a_{n, n-j}$ 矩阵, $D_m = \text{diag}(P_1, \dots, P_m)$. 代入可直接解方程!

Schur算法: 直接计算 k_m , 不计算 a_m ;

Beyond Least squares 超越最小二乘法

最小二乘与 L^2 模

- ▶ 最小二乘法是应用最广泛的方法;
- ▶ 应用上对应简单参数大量样本的经典统计模型
方程 $Ac = D$ 是over-determined: 方程数多于未知变量数;
- ▶ L^2 模保证整体误差小, 但可能有小的波动项无法消除;

稀疏压缩与 L^1 模

- ▶ 现代生物信息, 图像, 基因表示等领域发展很快;
- ▶ 应用上对应与样本复杂(参数多)但样本个数少的高维统计问题;
方程 $Ac = D$ 是under-determined: 方程数远少于未知变量数;
希望用到的未知变量个数越少越好 L^0 模。稀疏表示!!!
- ▶ L^1 模是 L^0 模的逼近, 统计意义上证明 L^1 最小的解对应与 L^0 上的最小解;
研究还在继续!

EXERCISE ONE

作业4/11课堂交。上机作业交电子版4/11前到邮箱。带***题选做。

1. 记 $L^2(\mathbb{R})$ 为复平方可积函数($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$), 定义复内积并验证其是一个Hilbert空间。
2. 计算周期为2的奇方波的傅立叶级数;
3. 给定微分方程 $u'' + a^2u = f(t)$, 已知当 $f(t) = \delta(t)$ 时, 得到基本解 $G(t) = e^{-a|t|}/(2a)$. 证明: 给定任意函数 $f(t)$ 的解为 $G(t) * f(t)$.
注: 利用傅立叶变换。
4. 写出高斯函数表达式, 说明其属于Schwartz空间, 计算其傅立叶变换。
5. 证明: 傅立叶变换的对偶性: 即 $F = \widehat{f}, \widehat{F} = 2\pi f(-t)$ 。计算 $\frac{\sin x}{x}$ 的傅立叶变换。
6. 证明: (1) 如果单位响应信号满足 $h(t) = 0, t \leq 0$ (称为因果信号), 则系统是因果系统。
(2) 如果单位响应信号满足 $\int |h(t)| < \infty$, 则系统是BIBO稳定系统。(输入有界, 输出有界)。
7. *** 验证: 指数函数 e^{ist} 是任一卷积算子和平移的特征向量。
即任意 $h(t) * e^{ist} = \lambda(s)e^{ist}, T_s(e^{ist}) = \lambda(s)e^{ist}$, 其中 s 为固定参数, t 为变量。

上机作业MATLAB

要求提交的M文件可直接执行得到相关图表, 并有相关结果的说明。

1. (信号的生成与变换)
 - A: 试生成以下信号的一个4096个样本的序列(1)周期为2的方波(2)Matlab的Sinc函数。
 - B: 计算序列的傅立叶变换。画出其图形及其频谱(可用fft)。
 - C: 计算(1)和(2)的卷积, 画出图形和频谱。并验证时域的卷积公式。
 - D: 上交程序(.m)及C中的图形(.fig 或.jpg)。
2. (真实信号的频谱分析)
 - A: 学习MATLAB demo: xpsound.m, 学习信号的功率谱密度(PSD)和谱图(Spectrogram)的定义, 观察其峰值或亮区域与信号的关系。
 - B: 自己录入声音生成WAV文件或找到一个wav文件; (请使用较短的时间序列), 读入信号 $x(n)$;
 - C: 给出信号的功率谱密度(PSD)和谱图(利用函数 periodogram(x), spectrogram(x))。
 - D: 上交wav文件及C中图形, 说明信号与图的关系;

3. (模拟信号降噪)

A:构造一序列带噪音信号(可用2中信号加上随机噪音rand函数);

B:构造阶数为 $k = 3$ (或更高)的均值滤波器及中位数滤波器 $y(n) = \text{mean}(x(n), x(n-1), x(n-2))$, $y(n) = \text{median}(x(n), x(n-1), x(n-2))$ 并滤波以上信号。

C:画图给出所有信号和谱密度图, 说明降噪效果(可用sound函数听), 比较说明两个滤波器的不同。

D:上交原程序及C中图形。

E:(***) 试用一个真实图像实现以上步骤, 说明中位数滤波器更好保持边缘信息。注意: 滤波器是二维矩阵。可用imfilter 或filter2函数。

EXERCISE TWO

作业5/9课堂交。上机作业交电子版5/9前到邮箱。带***题选做。

1. (Dirac comb) 定义 $\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, 则 Dirac comb 是离散的周期序列, 证明其傅立叶展开为 $\Delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum e^{nWt}$, 进一步其傅立叶变换 $\widehat{\Delta_T(t)} = W\Delta_W(w)$, 其中 $W = 2\pi/T$.
2. 计算 $x(n) = \cos nw, n \geq 0$ 的单边Laplace变换(n 看成实数), z 变换和离散时间傅立叶变换(DTFT), 说明其收敛域。
计算 $X(z) = \frac{z}{z^2 + w^2}$ 的逆 z 变换 $x(n)$.
3. 给定一阶系统 $H(z) = \frac{z}{z-K}$, K 是常数。给出其对应的差分方程(滤波器时域表示). 分别对 $K = 0, 0.5, 1$ 的情形分析其频率响应, 说明滤波器类型(低通, 高通, FIR, IIR)。
4. 给定滤波器 $y(n) + 5y(n-2) = x(n) + 3x(n-1) + 2x(n-2)$.
a: 给出系统的传递函数 $H(z)$, 求出其冲激响应 $h(n)$.
b: 给出 $h(n)$ 的ROC, 系统的零点和极点, 并判断系统的因果性, 稳定性。
5. 证明: (1) 如果离散LTI系统是BIBO稳定的, 则其传递函数的收敛域(ROC)包含单位圆。***反之也成立。
(2) 如果有理传递函数的离散LTI系统是BIBO稳定, 则其所有极点都在单位圆内(ROC包含 $|z| \geq 1$). ***反之也成立。
6. (双线性变换) 定义 $s = \frac{z-1}{z+1}$, 证明 s 域中的频率 w 和 z 域中频率 w' 的关系 $w = \tan(w'/2)$.

上机作业MATLAB

要求提交的M文件可直接执行得到相关图表, 并有相关结果的说明。

1. (模拟演示时域的抽样定理)
 - A: 构造一个频率有限的信号(可取若干个正弦信号的和, Sa函数或自选声音文件)
 - B: 构造合适抽样频率的抽样信号。给出对应信号的频谱, 并画图比较。
 - C: 尝试从抽样信号恢复原信号(可以filter)
 - D: 上交原程序及B中图形。
 - E: (***)尝试对一个真实图像进行抽样和恢复, 比较恢复前后图像的差异。
2. (z 变换) 验证上面第四题作业的结果。利用residue()求出 $h(n)$, 利用zplane()画出零点和极点, 利用impz()画出频率响应。上交程序(.m)及图形(.jpg)。

3. (FIR滤波器设计)设计一个低通滤波器其指标是: 通带截止频率 $f_p = 800Hz$,阻带截止频率 $f_s = 1000Hz$, 抽样频率 $f = 4000Hz$,通带波纹 $\alpha_p = 0.5dB$,最小阻带衰减 $\alpha_s = 40dB$.

(注:可计算有 $\delta_p = 0.0559$, $\delta_s = 0.01$, $w_p = 0.4\pi$, $w_s = 0.5\pi$.)

A: 利用MATLAB函数设计等波纹滤波器: `firpm()`; 画出频率响应图(.fig 或.jpg)

B: 利用MATLAB函数设计最小二乘滤波器: `firls()`;画出频率响应图(.fig 或.jpg)

C: 利用MATLAB函数设计基于窗函数的FIR滤波器。阶估计`kaiserord()`, 可用窗函数 `blackman()`,`hamming()`,`kaiser()`,`chebwin()`; 滤波器: `fir1()`;画出频率响应图(.fig 或.jpg)

D: 上交原程序及所有图形,比较三种方法的差异。

EXERCISE THREE

作业5/23课堂交。上机作业交电子版5/23前到邮箱。带***题选做。

1. 给出离散傅立叶变换的逆矩阵 F_N ,证明其可用离散傅立叶变换 D_N 计算。
 - (1) $F_N(\vec{x}(n)) = D_N \cdot \vec{x}(N-n)/N$, $\vec{x}(N-n)$ 是输入信号的逆排列;
 - (2) $F_N(\vec{x}) = (D_N \cdot \vec{x}^*)^*/N$, 其中*是复共轭;
 - (3) $F_N(\vec{x}) = \text{swap}(D_N \cdot \text{swap}(\vec{x}))/N$, 其中 $\text{swap}(a+bi) = b+ai$, 即交换虚部和实部。
2. (1) 给定信号 $x(n)$, 连续做四次DFT后的结果是什么? 考察 D_N^4 .
 (2) (**)试给出 D_{16} 的基为4的一步矩阵分解(即一步基为4的FFT算法).
3. (1) 证明: 傅立叶变换矩阵的行向量 $c_k = \{W_N^{kj}, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ 是所有 N 阶循环矩阵的特征向量, 其中 $W_N = e^{-i2\pi/N}$, 计算行向量的长度。
 (2) 给定以下二阶差分矩阵 A_2 , 证明DCT2的所有行向量 $c_k = \{\cos(j+1/2)k\pi/N, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ 是其特征向量并计算行向量的长度。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
4. 证明:DCT4的所有行向量 $c_k = \{\cos(j+1/2)(k+1/2)\pi/N, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ 是以上矩阵 A_4 的特征向量。给出 A_4 的第一行和最后一行的计算方法。(给出对应的边界条件并计算).
5. 利用z变换给出再抽样运算的频率响应。 $(\uparrow 2)(\downarrow 2)(e^{iw}) = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{i(w+\pi)})$ 及 $(\downarrow 2)(\uparrow 2)(e^{iw}) = e^{iw}$.
6. 验证hat函数(三角波)是尺度方程 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k)\phi(2t-k)$ 的解。其中 $h_0 = (1/4, 1/2, 1/4)$. ***说明:一般的B样条函数都是其解。
7. 给定Daubechies乘积滤波器 $P_0(z) = \frac{1}{16}(-1+9z^{-2}+16z^{-3}+9z^{-4}-z^{-6})$.
 - (1) 验证其满足PR条件(完全重构), 求出其六个零点。
 - (2) 试给出一个4/4滤波器组的 h_0, f_0 表达式; (Daubechies小波)
 - (3) 试给出一个6/2滤波器组的 h_0, f_0 表达式;
 - (4) 试给出一个5/3滤波器组的 h_0, f_0 表达式;

上机作业MATLAB

要求每题提交一个M文件(可直接执行)和一个所有结果的说明文件。

1. (FFT和卷积)

A:自己编写一个实现 $N = 2^K$ 序列FFT算法的程序。并构造 $N = 4096$ 或更长的序列,与MATLAB的FFT比较运行时间(MATLAB时间函数)。

B:自己编写两个相同长度序列的循环卷积程序。构造或利用第一次作业的数据进行卷积计算。并与利用MATLAB *fft, ifft*实现循环卷积的方法比较运行时间。为什么MATLAB没有循环卷积函数?

C:学习用MATLAB debug发现以上两个程序的主要运算瓶颈(花费时间最多代码),比较运行时间并尝试改进。

D:(***) 试用FFT变换真实图像,然后选取一部分傅立叶系数(一个小矩阵或大的数值?),再用ifft变换看图像是什么。如何选取子矩阵?

2. (DCT2变换)

A:给出 $N = 8$ 的DCT2的 8×8 矩阵的八个基向量(行向量),画出其基向量以及其傅立叶变换向量。

B:试验DCT压缩。选取一个 256×256 或合适大小图像,利用MATLAB的DCT2函数变换,适当压缩系数,再用IDCT2恢复,比较图像差异。

注记:可以选取左上角的方阵,其余元素变零。或者保留较大系数,将较小系数置零。

C(***)试验JPEG压缩。选取一个 256×256 或合适大小图像,分割图像成为 8×8 的小块,每块进行DCT2变换,请适当压缩每一个 8×8 子矩阵,再用IDCT2恢复,比较图像。

注记:标准jpg压缩将改变图像灰度范围到比如 $[-128, 127]$,除以标准压缩矩阵改变每个 8×8 子矩阵,结果取整,再取逆,请参考相关文献。

3. (小波函数)利用附件中cascade.m函数计算以下小波的尺度函数。

A:直接给出Daubechies小波的尺度函数。

B:利用习题中结果,给出 $5/3, 6/2$ 小波的尺度函数。

C:取 $h = (1/4, 1/2, 1/4), h = (2/3, 1/3)$,给出结果。

4. (小波变换)参考附件中D4.m函数编写一个小波变换。

A:自己编写一个实现 $5/3$ 滤波器组的一个小波变换(不迭代)及其逆变换。可以采用周期的边界条件(即选取变换矩阵为循环矩阵)。给出一个测试信号的变换及逆变换结果(比如sinc信号)。

注记:如果编程困难,可以直接用D4.m中的 $4/4$ 滤波器组变换。

B:使用A中函数,编程实现迭代的小波变换及逆变换。(迭代参数可选,一般3-5即可)。给出一个例子。

C:(信号压缩)选取一个信号(比如sinc信号),选取合适的方法压缩B中变换后系数(某些置零),并逆变换恢复,比较不同。

D:(信号去噪)给信号加上随机噪音,使用经典小波硬降噪方法(确定一个阈值 δ ,小波系数比 δ 小则置零)。比较降噪效果。

E:(***)(图像压缩降噪)试用MATLAB小波工具箱中函数对真实图像进行变换,压缩或降噪,恢复,比较图像。

EXERCISE FOUR

作业6/10交信箱。上机作业交电子版6/10前到邮箱。带***题选做。

1. 设随机信号 $x[n] = A \cos(\omega n + \phi)$, 其中 ϕ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量, A 是均值为零, 方差为 σ^2 的正态分布。
 - (a) 求 $x[n]$ 的均值, 方差;
 - (b) 计算其自相关系数, 说明它是平稳信号。
 - (c) 计算其频率谱和功率谱。
2. 证明LTI系统的输入和输出的自相关系数公式: $r_y(k) = r_h(k) * r_x(k)$, 其中 $r_h(k) = h(n) * h^*(n-k)$, 为系统的相关序列。
***矩阵表示: $Y = HX$, 则 $E(YY^T) = HE(XX^T)H^T$.
3. 证明: Household 变换: $H = I - 2uu^T$ 是正交矩阵, 说明其是以 u 为法向量的平面进行反射的矩阵变换。
4. 证明以下矩阵逆的公式: 设 M, A, W 是 $n \times n$ 矩阵, U, V 是维数为 $n \times m, m \times n$ 的矩阵, u, v 是 $n \times 1, 1 \times n$ 的向量。 I 是恒同矩阵。
 - (a) $M = I - uv, M^{-1} = I + uv/(1 - vu)$
 - (b) $M = I - UV, M^{-1} = I_n + U(I_m - VU)^{-1}V$
 - (c) *** $M = A - UW^{-1}V, M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$
Woodbury-Morrison 公式。

上机作业MATLAB

要求每题提交一个M文件(可直接执行)和一个所有结果的说明文件。

1. (统计信号处理)
 - A: 学习MATLABdemo:lpcardemo.m, 试给你选择的语音文件建立一个AR模型, 比较模型和真实数据的差异(耳朵听和谱比较)
 - B: 自己构造MA模型和生成白噪声, 调试不同的模型, 产生有意义的声音!
 - c: (***) 学习MATLABdemo:ipexwiener.m, 试给你选择的图像进行Wiener去噪, 说明差异。
2. (矩阵分解)
 - A: 随机产生矩阵 $A_{256 \times 256}$.
 - B: 利用MATLAB函数计算A的LU分解, QR分解, SVD分解。比较计算速度。
 - C: *** 试用一个图像作为矩阵, 求出SVD分解, 压缩若干奇异值 ($\sigma_i < h, \rightarrow \sigma_i = 0$), 恢复图像, 比较压缩效果!

自我介绍

信号处理的数学方法 aka 信号与系统的数学方法 Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

March 1, 2011

- ▶ 张思容: Ph.D. 几何分析, 医学图像分析;
- ▶ 办公时间: 周一(12pm-2pm)或预约。图书馆西配楼501
- ▶ 联系方式: 134-3920-1025. zhangsirong@buaa.edu.cn
- ▶ 欢迎大家学期中提建议和问题, 不要最后要成绩!

Chapter 1: 数学信号处理简介

课程简介

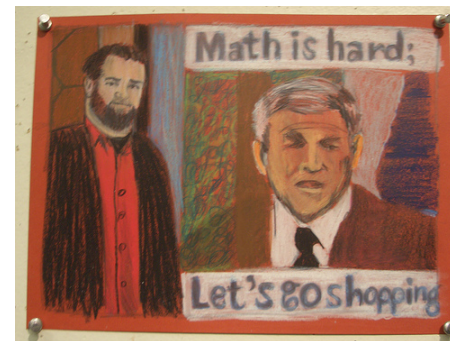
信息科学介绍
课程大纲

信号处理的数学模型

信号与系统
信号处理的例子
信号的数学模型

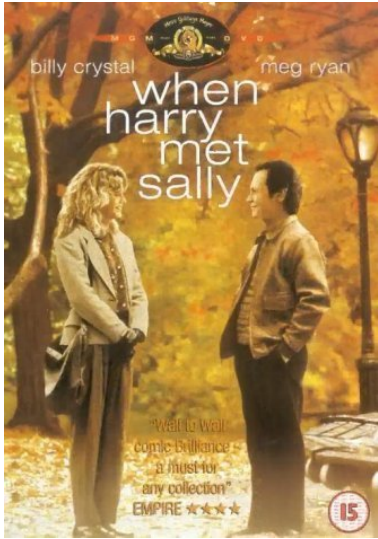
MATLAB简介

Motivation: 从数学到信息科学



- ▶ 信息是什么?
广义: "知识"+"可以理解"
狭义: 人的感官得到something
应用: 信号
- ▶ 信息科学是什么? 例子: 打电话。
信息获取, 信息传输, 信息处理和分析, 信息应用(控制).
- ▶ 相关学科:
EE, 自动化, BME, 系统工程;
- ▶ ***数学方法: (应用数学) 建模+算法
Mathematics for Engineers!

When 应用数学 meets 信号处理!(ICM1998)



- ▶ 史前时代: 百科全书, 统计年鉴, 图书馆...
- ▶ (1950前)傅立叶分析 → 模拟信号
- ▶ (1950s)计算机诞生: 信息论, (1960s) 快速傅立叶变换(FFT) → 数字信号
- ▶ (1970s) 随机过程 → 语音信号
- ▶ (1980s) 调和分析 → 图像信号
- ▶ (1990s-现在) 几何偏微分方程, Markov随机场, 代数几何... → 医学图像, 录像, 计算机视觉。
- ▶ 信号处理的Holy grail: 人工智能 → (模式识别, 统计学习, 自动控制)

课程内容

预备要求: 微积分, 线性代数, 程序设计.

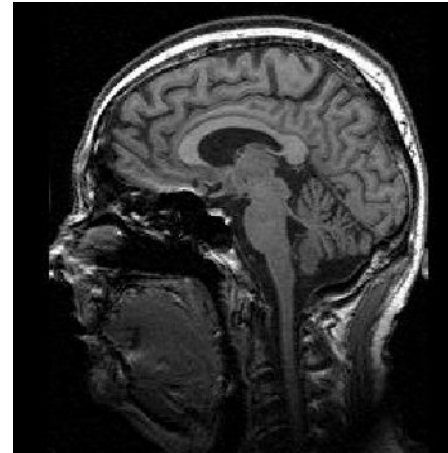
主要目标: 学习不同数学模型的信号处理方法, 应用MATLAB编程***。

主要内容: 连续信号与傅立叶分析; 离散信号与Z变换, 有限信号与小波, 随机信号与自适应信号处理(研究生).

教学参考书:

- ▶ (参考教材)数字信号与图像处理: 郑方,章毓晋. 清华大学出版社.7302120692
- ▶ (参考教材)信号处理的数学方法, 柳重堪. 北航内部讲义。
- ▶ (推荐)Signal Processing for everyone, Gilbert Strang. (介绍文章 60页)
- ▶ (推荐)Computational Science and Engineering, Gilbert Strang. MIT 公开课程 18.085.
- ▶ Matlab: MATLAB guide, D.Higham. SIAM 或其他MATLAB参考书。

信号的分类



- ▶ 自然信号: 声音, 图像, 电信号, 地震波..
- ▶ 人工信号: 电话, 收音机, 电视, 医学图像。
- ▶ 推广: 股票曲线, 人口曲线..
- ▶ 课程对象: 声音信号和图像信号。
- ▶ MATLAB demos:

课程学习

- ▶ 上课: 提问! Don't waste your time and my time!

研究生: 提问与成绩挂钩。

- ▶ 作业3-4次: 抄袭作业成绩为零!

- ▶ 计算机作业: 机房或自己电脑?

本科生: 可以2-3人一组。

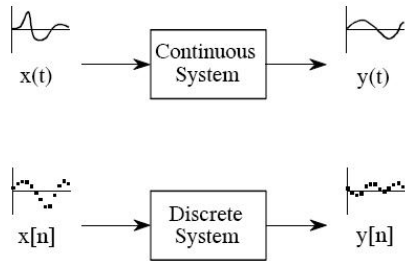
研究生: 可以合作但独立提交完成。

- ▶ 成绩评估(TBA)

本科: 平时作业30+上机作业30+大作业30(?)+ 课堂参与10=100

研究生: 平时作业40+上机作业40+大作业20=100

信号与系统



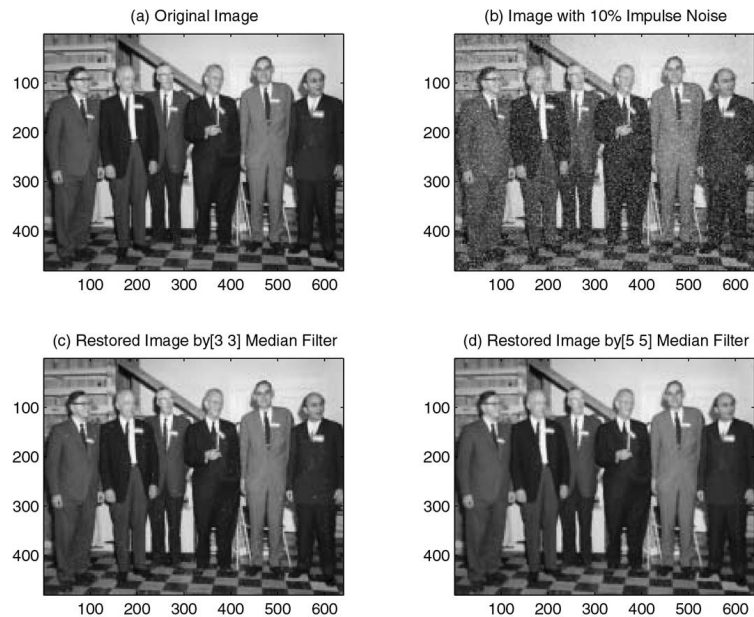
- ▶ 输入信号: $x(t), x(n)$ (冲激信号)
系统: H (滤波器)
输出信号 $y(t), y(n)$ (响应信号)
- ▶ 系统是个黑盒子 (black box)。
常见系统: 差分系统, 加法器, 放大器。
动力系统? 系统控制?
- ▶ 计算机实现: 数据 \rightarrow 变换 \rightarrow 数据。
数学模型?

信号处理的例子



- ▶ 例子: 声音信号处理;
- ▶ 例子: 图像信号处理;
- ▶ 主要内容: 信号降噪, 信号恢复, 信号分析
信号表示与传输 \rightarrow 信息论
信号识别与控制 \rightarrow 模式识别, 系统控制;

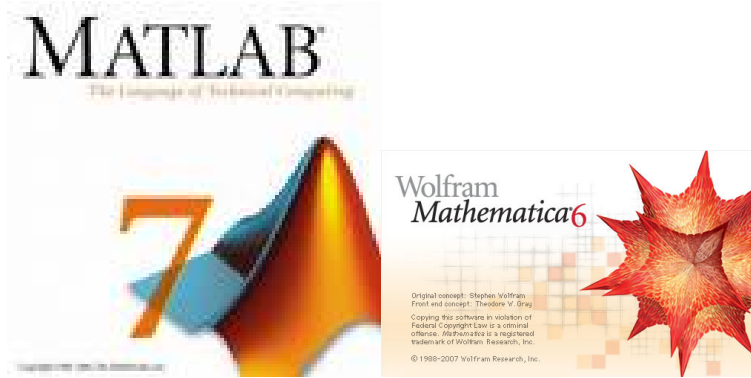
简单图像处理例子



信号的不同模型

- ▶ 确定信号模型: $x(t) \in L^2 \rightarrow$ 傅立叶分析
泛函分析: 函数空间+线性算子 \rightarrow 小波分析
关键: 信号的稀疏表示
- ▶ 随机信号模型: $x(t)$ 是随机过程 \rightarrow 时间序列分析 ARMA
关键: 平稳随机过程, 谱分析 $E(x(t))$
- ▶ 图像的信号模型: 可以 1D \rightarrow 2D 直接推广; (经典信号处理)
关键: 图像的函数空间不存在!
现代信号处理: 一般的图像应该是广义函数, 但处理还是用函数空间 BV (或 TV).
自然图像有伸缩不变的统计特征, 戴放大镜的人可以同样正常的生活!
- ▶ *** 离散的计算模型: 向量与矩阵变换 (应用线性代数!)
关键: 快速算法。

Why matlab?



Matlab=Matrix Laboratory

- ▶ MATLAB VS Mathematica
- ▶ MATLAB优点：交互式环境；平台独立；图形功能强大；应用函数库和工具箱；
- ▶ MATLAB缺点：全英文参考，比低级语言(C)慢；与C编程有区别； 昂贵；

MATLAB 编程提示

- ▶ 所有数据是矩阵； 矩阵是数组，次序:列优先!
- ▶ 交互式或M文件；简单编程结构(可少用for循环)；
- ▶ 图形功能与函数功能；输入可以是矩阵!

使用提示：

- ▶ 大小写字母表示不同变量；
- ▶ `()`, `[]`, `{}`表示不同内容；
- ▶ `help`可用，变量名可看内容；
- ▶ `;`的用途；

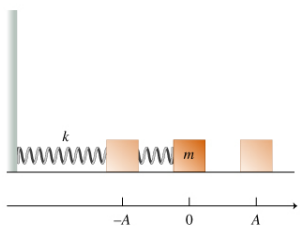
电脑演示：桌面，变量，运算，图形；文件；

信号处理的数学方法 aka 信号与系统的数学方法 Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn
数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

March 15, 2011

简单调和振动



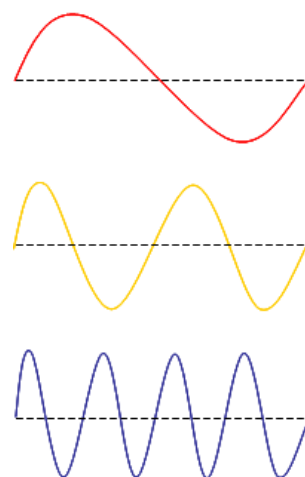
- Hooke定理: $F = -ku$
- Newton定理: $F = ma = m\ddot{u}$
- 方程 $m\ddot{u} = -ku$
- 解: $u(t) = A \cos(ct - \phi)$, 称其中 $c = \sqrt{k/m}$ 为频率, A 为振幅, ϕ 为相位。
- A 和 ϕ 由初值决定。
- 有外力 f 的振动方程求解? $m\ddot{u} + ku = f$ 参考非齐次线性方程求解(齐次解+特解)。
- 一条线上多个节点的简单振动? 产生类似冲浪的效果: 水上下振动, 人平行波动。

Chapter 2: 连续信号与傅立叶变换 Continuous signals and Fourier Transformation

- 1 信号空间: 傅立叶王国 Fourier Kingdom
 - 信号的来源
 - 有限能量信号空间
 - 特殊的数学信号
- 2 系统与变换
 - 傅立叶变换
 - 卷积与LTI系统
 - 连续信号系统: 模拟滤波器

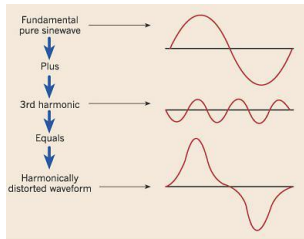
阅读章节: 北航教材 1.1-1.2, 1.3.1-1.3.2; 2.1-2.3; 2.5-2.8;
参考书: Elias Stein, 傅立叶分析导论.
Gasquet and Witomski, 傅立叶分析和应用。

一维波方程



- Newton定理: $F = ma = \rho h \ddot{y}(t)$
- 方程 $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, 简化可取 $\rho/\tau = 1$
- 解一: D'Alembert
 $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$.
- 解二: 分离变量 $u = \mu(t)\nu(x)$,
 $\frac{\ddot{\mu}(t)}{\mu(t)} = \frac{\ddot{\nu}(x)}{\nu(x)} = \lambda$
 $\ddot{\mu}(t) - \lambda\mu(t) = 0, \ddot{\nu}(x) - \lambda\nu(x) = 0$
 $u(x, t) = (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx,$
 $\lambda = m^2$.
- $m = 1$ 基调 fundamental tone, $m = 2$ 第一 overtone (第二 harmonic), ...

波的叠加与傅立叶级数



- 一般解 $u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx$.
- 初值条件 $u(x, 0) = f(x), u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0$.
存在解 $\leftrightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$
- 存在解的必要条件 $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$.
- 推广到 $[-\pi, \pi]$, 奇函数 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$, 偶函数 $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx$,
- 任一函数 $F(x) = f(x) + g(x)$, 是否 $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$?

周期函数的傅立叶级数

Definition

给定 f 是 $[a, b]$ 上可积函数, $L = b - a$, 则 f 的第 n 个傅立叶系数为 $\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$
 f 的傅立叶级数为 $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i 2\pi n x / L}$

相关问题:

- 1 任一信号都有傅立叶级数吗? L^2
- 2 任一函数是信号吗? $f(x) = x^2$? 声音听不出来;
- 3 傅立叶级数可以很好逼近信号吗?
傅立叶分析的重要缺陷: Gibbs现象, 在间断点处, 傅立叶级数永远不可能逼近期望值; 大约上下各0.09的误差。
经典例子: 方波 $SW(t) = 4/\pi(\sin t + \sin 3t/3 + \sin 5t/5 + \dots)$

傅立叶的远见:

Joseph Fourier(1768-1830)



Question:

任意一个连续或不连续的函数是否可以表示为一列连续(光滑)函数的和?

Answer:

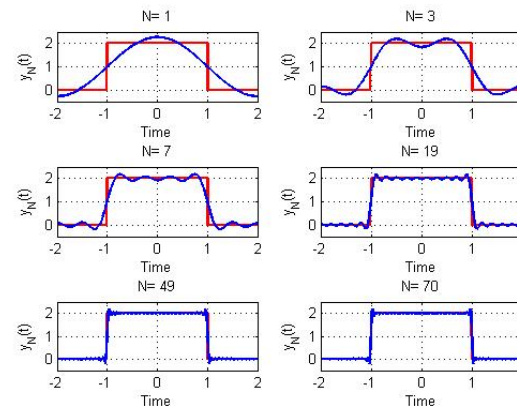
D'Alembert, Euler: 不一定!

J.Fourier: 一定!

Remark

Joseph Fourier: 参与拿破仑的埃及远征; 发现温室效应。

Gibbs 现象



傅立叶级数的收敛问题

主要问题:

记部分和 $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{i2\pi nx/L}$. $S_N(x)$ 在怎样意义下收敛到 $f(x)$?

前提: 傅立叶系数有意义要求 f 是绝对可积!

收敛性: (与函数可微性有关) Why?

- ① 点点收敛。Dirichlet条件: L^1 , 有限间断点, 有限极值。
- ② 平方可积收敛 L^2 。当 $N \rightarrow \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$.
- ③ 一致收敛 (uniformly): 如果 f 是两次连续可微, 利用 $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$, $S_N(x) \Rightarrow f(x)$.

唯一性: $f(x)$ 连续, 且 $\forall n, \hat{f}(n) = 0$, 则 $f \equiv 0$.

Hilbert空间与内积

Definition (内积: $\langle x, y \rangle$)

满足

- ① $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ② $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ③ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\langle x + y, w \rangle = \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle$

诱导范数: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Hilbert空间: 线性内积空间且范数定义的极限是完备的(巴拿赫空间)。

Definition (正交基)

Hilbert空间的一组基 e_i 称为正交基: 如果满足 $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

柯西许瓦茨不等式

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

历史注记

Lennart Carleson(1928-)



Theorem (点收敛, Carleson 1966)

任意一个平方可积函数 (L^2) 的傅立叶级数几乎处处收敛。

- Richard Hunt推广到 $L^p, p > 1$.
- Kolmogorov(1903-1987)构造一个绝对可积(1924)函数的傅立叶级数处处不收敛。
- Kahane, Katznelson: 任一零测度集, 存在一个连续函数在上面的傅立叶级数处处不收敛。

能量有限的信号空间: L^2, l_2

能量有限的信号: $E(f) = \int f(x)^2 dx < \infty, f(x) \in L^2$.
或者离散信号 $E(f(n)) = \sum f(n)^2, f(n) \in l^2$.

Theorem (L^2 的正交基)

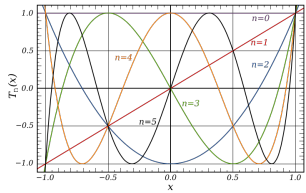
$e_n(x) = e^{inx}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的一组正交基,
且傅立叶级数是最佳逼近 $\|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sum_n c_n e_n\|$
特别它是完备正交基。(存在一致逼近)

Theorem (平方可积收敛)

$f \in L^1(a, b)$, 当 $N \rightarrow \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$.
有Parseval等式 $\sum_n |\hat{f}_n|^2 = \|f\|^2$.
特别有Riemann-Lebesgue定理: $|n| \rightarrow \infty, \hat{f}(n) \rightarrow 0$.

注记: 一般考察Hilbert空间有可数个完备正交基, 是有限维欧几里德空间的最佳推广。

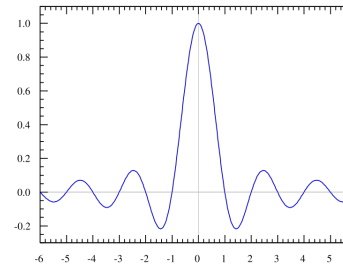
L^2 的正交基



- 多项式基正交化: $t^i : i = 1, 2, \dots \rightarrow$ Legendre多项式 $\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$.
- (左边图)切比雪夫多项式 Chebyshev $T_n(t) = \cos(n \arccos t), n = 0, 1, 2, \dots - 1 \leq t \leq 1$
- Bessel 函数: 来源于二维对称振动方程(鼓). $r^2 B'' + rB' + \lambda r^2 B = n^2 B$ 其中 $B(r)$ 的沿轴向的振动, r 是半径, λ 是鼓的频率, n 是Bessel函数的阶。一般Bessel函数记为 $J_n(\lambda_k r)$.

典型信号

- 指数信号 $x(t) = Ae^{bt}, b \in \mathbb{C}$
周期信号: (正弦与余弦信号)
- 单位信号: 单位矩形信号 $G_1(t)$ (方波脉冲), 单位阶跃信号 $u(t)$ (方波($SW(t)$)), 单位斜变信号 $R(t)$ (三角波) 关系: $R(t) = \int u(t)$.
- 特殊信号: 抽样信号 $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$, MATLAB: *sinc*函数。



δ 函数

单位冲激信号的不同定义:

- 1 方波的导数: $\delta(t) = SW'(t) = 4/\pi(\cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots)$. 不收敛!
- 2 在一点的力: $u'' = \delta(t)$, 方程的解为 $u(t) = -R(t - a) + ct + d$; 参见: Green函数。由不同 δ 函数的解可以得到 $u'' = f$ 的通解!
- 3 狄拉克定义: $\int \delta(t)dt = 1, \delta(t) = 0, t \neq 0$. 抽样特性 $\int \delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)$.
- 4 线性泛函: $\delta : H \rightarrow R, \delta(f(t)) = f(0)$.
- 5 函数逼近: 方波脉冲的逼近; $\delta(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G_s(t)}{s}$ 高斯函数的逼近。

信号空间及其运算

Definition (复 $L^2(0, 2\pi)$ 空间及三角函数基)

信号函数 $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, 记三角函数基为 e^{int} , 内积 $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, 则能量有限的信号 f 组成一个希尔伯特空间。 f 的傅立叶级数展开记为 $\sum c_k e^{int}$.

信号的运算: 信号变换后还是信号?

- 线性运算(线性空间)
- 平移: $f(t) \rightarrow f(t - h)$; 信号延迟
- 反射: $f(t) \rightarrow f(-t)$; 信号颠倒
- 伸缩: $f(t) \rightarrow af(at)$; 信号放大;
- 乘积: $f(t)g(t)$: 信号调频;
- 微分与积分: $f(t) \rightarrow f', \int f$???
- 卷积: $f(t) * g(t)$???

信号变换：正交变换

Definition (希尔伯特空间的正交变换)

定义线性变换 $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 $\langle Af, Ag \rangle = \langle f, g \rangle$, 即保持内积不变, 称为 希尔伯特空间上的一个正交变换。

任意两组正交基的不同表示得到一个正交变换;

注: $f(t)$ 展开成傅立叶级数是 $L^2 \rightarrow l^2$ 的一个线性映射(正交?)

常见变换:

- 平移算子: $T_h(f(t)) = f(t - h)$?
- 反射算子: $R(f(t)) = f(-t)$; ?
- 伸缩算子: $S_a(f) = af(at)$; ?
- 乘积算子: $M_g(f) = f(t)g(t)$, 卷积算子: $C_g(f) = f * g$?
- 微分与积分算子: $D(f) = f', I(f) = \int f$?

Schwartz 空间傅立叶变换

Definition (傅立叶变换)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Proposition

- 1 平移 $f(x + h) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$
- 2 放大 $f(\lambda x) \rightarrow \lambda^{-1} \hat{f}(\lambda^{-1} \xi)$
- 3 微分 $f'(x) \rightarrow 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$
- 4 卷积 $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

Theorem (傅立叶变换是 $S(\mathbb{R})$ 上的线性变换.)

若 $f(x) \in S(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(\xi) \in S(\mathbb{R})$, 特别高斯函数变到本身。

傅立叶变换: 非周期函数的正交变换

一般的信号非周期函数,

怎样定义 $\hat{f}(n) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx} dx$? 前提: f 在无穷大时, 应该快速收敛到零(比如 $1/x^2$).

Definition (Schwartz 空间: $S(\mathbb{R})$)

其中的函数 f 无穷次可微且所有导数快速递减,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty, \quad \text{for every } k, l \geq 0.$$

EXAMPLE (高斯函数和 bump functions)

$$K_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\pi x^2 / \sigma}. \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}} e^{-\frac{1}{b-x}}, \quad a < x < b$$

Proposition

- 1 S 是线性空间, 对微分和多项式乘法封闭。

Schwartz 空间傅立叶变换是正交变换

Definition (傅立叶逆变换)

$$\text{记傅立叶变换 } \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

$$\text{则傅立叶逆变换 } \mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Proposition

- 1 乘积公式 $\int_{-\infty}^{\infty} f \hat{g} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} g dt$
- 2 逆定理 $\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f) = f$:
即 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$
- 3 Plancherel 定理: $\|\hat{f}\| = \|f\|$. $\|\cdot\|$ 为 L_2 范数。
- 4 *** Poisson 求和公式。 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi i x n}$, 特别 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$ 。

傅立叶变换: Schwartz空间到 L^2 空间

关键结果:

- 1 Schwartz 空间在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密;
- 2 傅立叶变换 \mathcal{F} 是Schwartz 空间上的正交(可逆)变换; $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- 3 \mathcal{F} 存在从Schwartz 空间到完备空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的扩张。

Theorem (L^2 空间的傅立叶变换)

\mathcal{F} 给出 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个正交(等距)变换。

- 1 $\hat{\hat{f}} = f$;
- 2 $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- 3 $\|f\| = \|\hat{f}\|$

注记: 可以进一步推广到广义函数(线性泛函)。

系统与算子

系统 H 是一个函数空间的算子(或变换)。 $H: x(t) \rightarrow y(t)$

常见信号运算都是算子。

常见系统:

- 线性系统: $H(ax + by) = aH(x) + bH(y)$
连续算子?
- 时不变系统: $H(x(t-k)) = y(t-k)$
信号处理对象 \rightarrow 线性时不变算子: LTI系统!
- 稳定系统: BIBO稳定系统 $x(t)$ 有界则 $y(t)$ 有界;
- 因果系统: $y(t_0)$ 依赖 $x(t), t \leq t_0$. 即系统不能预测。
- 例子:有限差分方程 $\sum_i a_i y(t-i) = \sum_j b_j x(t-j)$
- 再抽样算子: $S(x(n)) = x(nP), P \in \mathbb{N}$
是否是因果系统?

海森堡不确定原理: 傅立叶分析的局限

Theorem (海森堡不确定定理)

设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|f\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx = 1$, 有

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \hat{f}^2(\xi) d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

仅当 $f(x) = Ae^{-Bx^2}, B = A^4\pi/2$ 时等号成立。

Remark (物理解释:位置不确定性 \times 动量不确定性 $\geq \frac{h}{16\pi^2}$)

- 原子位于 $[a, b]$ 的概率为 $\int_a^b \psi^2 dx$.
- 原子的位置是期望 $x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi^2 dx$, 位置的方差是 $\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 \psi^2 dx$
- 对应有原子的动量分布为 $\int_a^b \hat{\psi}^2 dx$ 和方差。

卷积

Definition (卷积与周期卷积)

给定 $f, g \in L^2$, 定义卷积 $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx$;

特别如果 f, g 是周期 2π 可积函数, 则定义周期卷积

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dx$$

注记: 卷积即小学的多位整数乘法(不进位!)

- 卷积满足线性, 交换律, 结合律。
- $f * g$ 是连续的, 且 $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.
- 微分与积分: $D(f) * I(g) = f * g$.(周期函数)
- 傅立叶级数的收敛判定: 记部分和 $S_N(x) = (f * D_N)(x), D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin(x/2)}$
称为狄利克雷核, 还有Fejer, Abel, Gauss核。

连续信号LTI系统的模型

Remark

傅立叶王国：一般的能量信号可以看成 $L^2(0, 2\pi)$ 或 $L^2(R)$ 的函数。更广义的：能量信号属于一个Hilbert空间。

线性时不变系统(LTI)：是Hilbert空间的一个线性算子且与平移算子可交换。

Theorem (LTI系统基本结论)

线性时不变系统 \mathcal{H} 完全由单位冲激信号 $\delta(t)$ 的冲激响应 $h(t)$ 决定。且 $\mathcal{H}(x(t)) = h(t) * x(t)$ 。(所有LTI是个卷积系统)。

L^2 有很多正交基，对应的有不同的正交分解，为什么用三角函数基？为什么用傅立叶变换？

Theorem (LTI系统特征向量)

三角函数基是所有线性时不变系统 \mathcal{H} 的公共特征向量。

指数函数是所有LTI系统的特征向量

Theorem (有界正规算子的谱)

Hilbert空间上可以互相交换的对称(正规)算子族(至少存在一个有界算子)存在共同的特征向量。

正规算子(normal operator): $N \circ N^* = N^* \circ N$ 其中 $\langle Nx, y \rangle = \langle x, N^*y \rangle$ 。

Corollary

所有的LTI系统是卷积系统。卷积可以交换,且与平移算子 T_s 可交换,所以存在一组共同的特征向量。特别有 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

- 卷积算子可交换 $h_1 * h_2 * x = h_2 * h_1 * x$
- 卷积与平移算子 T_s 可交换;
- 满足 $h * e = \lambda e$, $T_s(e) = t_s e$, 仅有指数函数满足该方程!
- 直接验证 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

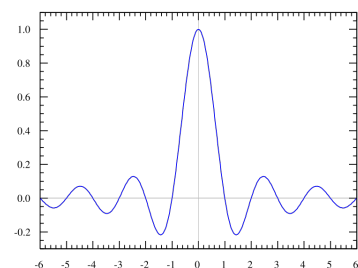
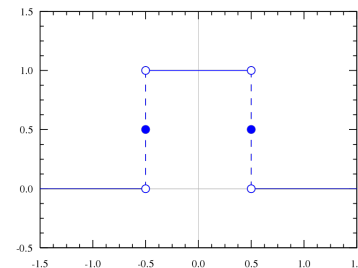
单位冲激信号与LTI系统的卷积解释

- δ_0 是一个线性泛函(可能无界!)。 $\langle \delta_0, x(t) \rangle = x(0)$
是否有Riesz表示定理? $\langle \delta_0, x(t) \rangle = \langle z(t), x(t) \rangle$
- 一般的函数表示有 $x(t) = \langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle$ 。
- 记 $\mathcal{H}(x(t)) = y(t)$, 则 $y(t) = \mathcal{H}(\langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle) = \langle \mathcal{H}(\delta_{t-s}), x(s) \rangle$
- 一般的可以定义 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle \delta, \mathcal{H}(x(t)) \rangle$
假设 $\mathcal{H}(\delta)$ 是有界泛函!, 由Riesz表示定理。 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle h(t), x(t) \rangle$ 。
- 设 $T_s(x(t)) = x(t-s)$, 则 $H \circ T_s = T_s \circ H$ 。
特别 $y(t) = \langle T_s(h(t)), x(s) \rangle = \langle h(t-s), x(s) \rangle = h(t) * x(t)$ 。

Remark

一般的 $\delta(t)$ 看成广义函数(distribution), 可以求导, 积分等。

简单信号：矩形波



- 作为周期函数的矩形波: $G_2(t) = 1$, 周期 $T = 2\pi$
傅立叶展
开 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n 2/\pi \text{Sa}(n) \cos nt$ 。
- 傅立叶展开的复数形式:
 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n \frac{1}{\pi} \text{Sa}(n) e^{-int}$
- 作为有限区间函数的矩形波: $G_2(t) = 1$ 。
傅立叶变换 $\widehat{G}_2(w) = 2\text{Sa}(w)$ 。
- 特别傅立叶系数 $F_n = \widehat{G}_2(nw)/(2\pi)$

广义信号

Remark (广义信号的傅立叶变换)

一般的 C_c^∞ 上的线性泛函称为分布(distribution).看作可积函数定义的泛函的推广。称为广义函数。

广义函数的傅立叶变换: 对任何函数 $x(t) \in S$, $\langle \widehat{f}, x(t) \rangle = \langle f, \widehat{x(t)} \rangle$

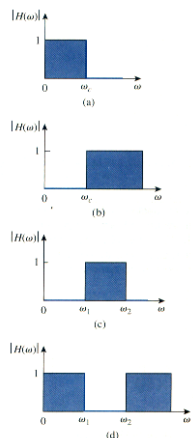
- 复指数信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$
傅立叶变换 $X(w) = \frac{1}{a+iw}$
- 符号函数 $sign(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}$
傅立叶变换 $SIGN(w) = \frac{2}{iw}$.
- 单位冲激函数 $\delta(t), \widehat{\delta} = 1$
特别 $\widehat{1} = 2\pi\delta(t)$.
- 单位阶跃函数 $u(t) = 1/2 + sign(t)$,
 $\widehat{u}(t) = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw}$.

LTI系统

LTI系统完全由 $h(t)$ 决定。

- 卷积的线性,与平移交换 \rightarrow 线性时不变
- $h(t) = 0, t < 0 \rightarrow$ 因果系统;
- $\int |h(t)| < \infty \rightarrow$ BIBO稳定系统;
- 频率响应:记 $H(w) = \widehat{h(t)}$,则输出信号频率 $Y(w) = H(w)X(w)$
称 $|H(w)|$ 为幅度频率响应; $arg(H(w))$ 为相位频率响应。
- 一般经典信号系统主要应用于频率的处理,称为模拟滤波器。
分类:低通(lowpass),高通(highpass),带通(bandpass),带阻(bandstop),全通(allpass)等。

理想滤波器及实现



- 全通系统(无失真)的频率响应: $H(w) = Ae^{-iwT_d}$,
 A 是频率, T_d 是群延时。
- 理想低通滤波器的频率响应:
 $H(w) = G_{2w_c}(w)e^{-iwT_d}$
- 注意: $h(t) = \frac{w_c}{\pi} Sa(w_c(t - T_d))$ 不是因果系统, 所以不能实现!
而且是无穷函数, 一般用有理多项式逼近。
- 常见模拟滤波器:
Butterworth滤波器: $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+B^2\omega^{2n}}$
切比雪夫滤波器: $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)}$
椭圆滤波器: $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 U_n^2(\omega)}$

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- L^2 空间的其他正交基;
- Gibbs现象(数学解释及高维情形)
- δ 函数的严格定义及其在微分方程中的应用(Green 函数);
- Schwarz空间上的傅立叶逆定理(傅立叶变换的逆变换是其本身)。
- 海森堡测不准定理;
- 常见模拟滤波器的实现;

信号处理的数学方法 aka 信号与系统的数学方法 Mathematical Methods in Signal Processing

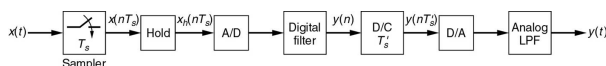
张思容

zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

April 12, 2011

从连续信号到离散信号



- 连续(或模拟)系统的实现: $H(\Omega)$ 由固定类函数逼近; 有固定电路实现(RLC), (专业软件设计);省电!
问题: 存在物理限制(太高频?); 设计复杂; 不精确(物理误差);
- 离散(或数字)系统的实现: $H(\Omega)$ 由有理函数逼近, 无限精确; 滤波器由电脑软件实现, 无物理限制; 增加AD转换, DA转换器;
问题: 耗电, 速度慢; 抽样信号的限制;
- AD转换器: 理想脉冲抽样 $x(t) \rightarrow x(nT_s)$, T_s 是抽样周期; 实际可能是矩形脉冲抽样;
- DA转换器: 理想插值公式可以完全重构; 实际用低通滤波器.

主要问题: 存在完全重构的插值公式吗? $x(n) \rightarrow x(t)$?

一般要限制 $x(t)$ 的函数空间, 比如多项式?

Chapter 3: 离散信号与z变换 Discrete signals and Z-Transformation

- 1 离散信号
 - 抽样定理
 - Z变换与DTFT
 - 例子与计算
- 2 离散LTI系统
 - 离散LTI系统的传递函数
 - 离散LTI系统的例子
 - 数字滤波器的设计

阅读章节: 北航教材 1.4, 1.5, 4.9;

参考书: 数字信号与图像处理: 第三章

G.Strang: Computational Science and engineering:

抽样信号及混叠aliasing

抽样与频率变化:

- 抽样频率: 间隔时间 T_s 选取样本 $x(nT_s)$. T_s 是抽样周期(秒), $f_s = 1/T_s$ 是抽样频率(单位HZ), $w_s = 2\pi/T_s$ 是抽样角频率(或抽样频率).
- 信号抽样频率: 设真实信号频率 f, w , 则抽样后数字信号频率 $f' = f/f_s, w' = 2\pi w/w_s = wT_s$
- 常用归一化频率: 为简化分析, 设 $T_s = 1, w_s = 2\pi$, 则抽样信号记为 $x(n)$, 数字信号频率属于 $[0, 2\pi]$,

抽样信号的混叠aliasing

- 设真实信号 $x(t) = \cos wt$, 抽样信号 $x(n) = \cos w'n$
- $w_s = 2w, x(n) = \cos \pi n$, 是最高频率信号, 称为Nyquist频率;
- $w_s = 4w, x(n) = \cos \pi/2n$, 是过抽样oversampling
- $w_s = 4/3w, x(n) = \cos 3\pi/2n$, 是欠抽样undersampling
***两个抽样一样 $1, 0, -1, 0 \dots$ 称为混叠aliasing(高频被低频表示);
- 特别: $\sin \pi n$ 与 $\sin 0$ 混叠。Nyquist频率对正弦信号不够, 一般要求信号的最大频率 $w \leq \pi/T_s$, 即抽样后信号频率 $w' \leq \pi$.

Shannon 插值公式(完全重构)

Theorem (Nyquist - Shannon定理)

抽样信号可以完全恢复原连续信号必须满足:
 (1)原信号是频率范围(频带)有限的,设最高频率 w_c ;
 (2)抽样频率至少是最高频率的两倍。 $w_s \geq 2w_c$.
 称 $2w_c, 2f_c$ 为奈奎斯特率, 称采样率 w_s 的一半为奈奎斯特频率。
Shannon 插值公式: 设抽样信号的高频频率(归一化后)为零 $\hat{x}(w) = 0, |w| \geq \pi$, 则 $x(t) = \sum x(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$

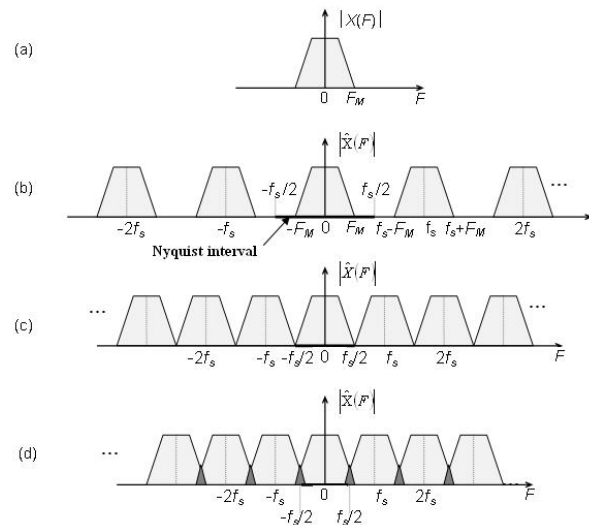
注记: 电话: 8kHz (通话3.4kHz); CD: 44.1kHz (声音20kHz)

Proof.

***假设 $x(n)$ 的傅立叶变换是周期函数。
 有傅立叶级数 $\hat{x}(w) = \sum c_n e^{inw}$, 验证: $c_n = x(-n)$.
 代入傅立叶逆变换定理 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum c_n e^{inw}) e^{iwt} dw$ 可得!



抽样信号的混叠现象aliasing



抽样定理证明:周期函数的离散谱

- 设周期函数在周期 $[0, T_1]$ 中定义为 $f_0(t)$;
- 周期函数的数学表示: $f(t) = \sum f_0(t - nT_1)$
 $f(t) = f_0(t) * \Delta_{T_1}(t)$

Proposition (Dirac comb的变换)

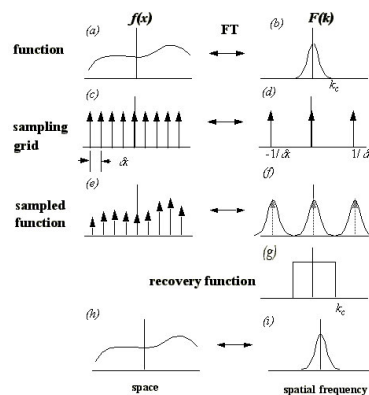
Dirac comb 是离散的周期序列。 $w_1 = 2\pi/T_1$, 有傅立叶展开 $\Delta_{T_1}(t) = \frac{1}{T_1} \sum e^{nw_1 t}$.
 傅立叶变换: $\widehat{\Delta_{T_1}(t)} = w_1 \Delta_{w_1}(w)$.

Corollary (周期函数的离散谱)

$$\widehat{f(t)} = \widehat{f_0} \cdot \widehat{\Delta_{T_1}(t)} = \sum (w_1 F_0(nw_1)) \cdot \delta(w - nw_1).$$

注记: 时域周期对应频域离散。

抽样定理证明:抽样函数的周期谱



- 数学表示: $f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}(t)$
- 卷积公式: $\widehat{f_s(t)} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f(t)} * \widehat{\Delta_{T_s}(t)}$
- 周期谱 $F_s(w) = \frac{1}{T_s} \sum F(w - nw_1)$.
 $F(w) = \widehat{f}$.
- 信号理想恢复:可以直接用频率域上方波相乘, 再傅立叶逆变换。
- 一般情况:使用低通滤波器直接得到信号。
- 有其他的抽样方法(矩形抽样定理, 频率抽样定理)。

拉普拉斯变换LT

单边LT变换:

- 目标: 任意函数可作"傅立叶"变换; $x(t)e^{-At}$
- 变换: $X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt, s = A + iw$.
- 收敛条件: $x(t)$ 分段连续, $|x(t)| \leq Ae^{Mt}$.
- 例子: $x \equiv 1, X(s) = 1/s$, 但傅立叶变换不存在.
- 逆变换: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds,$

双边LT变换:

- 推广双边Laplace变换: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$
s称为复频率。实变函数→复变函数!
- 如果傅立叶变换存在, $\widehat{x}(t) = X(s)|_{s=wi}$.
- 收敛域ROC的不同: $e^{At}\mu(t)$ 与 $-e^{At}\mu(-t)$ 的LT变换为 $\frac{1}{s-a}$, 收敛域 $Re(s) > a, Re(s) < a$.

离散时间傅立叶变换

物理频率的表示:

LT变换: s是复频域, 真实频率 $s = iw$: 虚轴;

z变换: $z = e^s$, 真实频率变到 e^{iw} : 单位圆。

设抽样信号 $x_s(t)$, 则其 $LTX_s(s) = \sum x(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

- 定义: $X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}$
- 谱为 2π 周期函数. 特别 $X(e^{i\omega}) = X(z)|_{z=e^{i\omega}}$
- 收敛条件: $x(n)$ 绝对可和. 其他? ROC包含单位圆.
- 周期卷积: $x_1(n)x_2(n) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{i\theta})X_2(e^{i(\omega-\theta)})d\theta$.

注: 与傅立叶变换不一样!!!

Z变换

抽样信号的LT变换:

- Dirac Comb: $\Delta_{T_s}(t) = \sum \delta(t - nT_s)$
- LT变换: $L(\Delta_{T_s}) = \frac{1}{1-e^{-sT_s}}$
- 抽样信号: $f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}(t)$
 $L(f_s) = \sum_0^{+\infty} f(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

Definition (Z变换)

设抽样信号 $x_s(t)$, 则其 $LTX_s(s) = \sum x(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

令 $z = e^{sT_s}$ 或 $s = \ln z / T_s$, 有 $X(z) = \sum x(nT_s)z^{-n}$.

一般的归一化表示 $T_s = 1$, 有序列信号 $x(n)$, Z变换 $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$.

Z变换的物理意义?

复分析回顾: Best functions

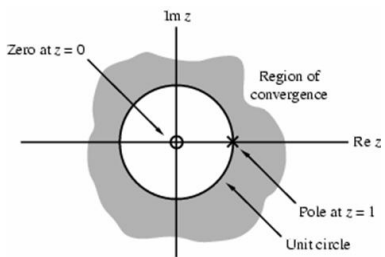
最佳函数: 解析函数

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
 $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ 无穷光滑不解析!
- 收敛域: 圆盘 $1/r = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$.
收敛域内任意函数值可以多项式指数逼近(泰勒公式仅仅是局部逼近);
→ 1970s 谱方法 (1950s 有限差分方法, 1960s 有限元方法)

亚纯函数或Laurent级数

- $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$
一般仅考虑有限负项, 则 $f(z)(z - p_1)(z - p_2) \dots$ 是解析的, 称 p_i 为极点;
- 收敛域: 可能是圆盘外 $|z| > r$, 圆环; $R_2 > |z| > R_1$, 收敛域内解析!
一般以极点为边界;

Z变换的收敛域



- Laurent 罗朗级数的收敛：在收敛域内每一点解析！
- $\sum x(n)z^{-n}$ 收敛的充要条件： $\sum |x(n)z^{-n}| < +\infty$
判别法则：比值或根值判别。
- 例子：双边有限序列；
左边序列；右边序列；
双边无限序列可能不存在Z变换！
- 复变函数的零点 z_i 和极点 p_j ：
 $F(z_i) = 0, 1/F(p_j) = 0$
- 结论：ROC以极点为边界！

Z变换的性质

Property	Sequence	z-Transform	ROC
	$g[n]$ $h[n]$	$G(z)$ $H(z)$	\mathcal{R}_g \mathcal{R}_h
Conjugation	$g^*[n]$	$G^*(z^*)$	\mathcal{R}_g
Time-reversal	$g[-n]$	$G(1/z)$	$1/\mathcal{R}_g$
Linearity	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(z) + \beta H(z)$	Includes $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
Time-shifting	$g[n - n_0]$	$z^{-n_0} G(z)$	\mathcal{R}_g , except possibly the point $z = 0$ or ∞
Multiplication by an exponential sequence	$\alpha^n g[n]$	$G(z/\alpha)$	$ \alpha \mathcal{R}_g$
Differentiation of $G(z)$	$ng[n]$	$-z \frac{dG(z)}{dz}$	\mathcal{R}_g , except possibly the point $z = 0$ or ∞
Convolution	$g[n] \otimes h[n]$	$G(z)H(z)$	Includes $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C G(v)H(z/v)v^{-1} dv$	Includes $\mathcal{R}_g \mathcal{R}_h$
Parseval's relation		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C G(v)H^*(1/v^*)v^{-1} dv$	

Note: If \mathcal{R}_g denotes the region $R_{g-} < |z| < R_{g+}$ and \mathcal{R}_h denotes the region $R_{h-} < |z| < R_{h+}$, then $1/\mathcal{R}_g$ denotes the region $1/R_{g+} < |z| < 1/R_{g-}$ and $\mathcal{R}_g \mathcal{R}_h$ denotes the region $R_{g-}R_{h-} < |z| < R_{g+}R_{h+}$.

特别：z域卷积(复卷积)是周期卷积(沿圆周积分)！

常见序列Z变换

- 单位冲激序列： $\delta(n), X(z) = 1$
注意：单位冲激序列不是单位冲激函数的离散抽样！
- 单位阶跃序列 $u(n), X(z) = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$
矩形序列： $G_N(n), X(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$
- 指数序列 $a^n u(n), X(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$
余弦序列 $\cos(n\omega_0)u(n), X(z) = \frac{z(z-\cos \omega_0)}{z^2-2z \cos \omega_0+1}$.
- ***再抽样序列： $x_b(n) = x(nb)$
- Downsampling 降抽样： $x_M(n) = x(Mn), M \in \mathcal{N}$
Z变换 $X_M(z) = X(z^{1/M})$ ROC变化！
- UpSampling 升抽样： $x_{1/M}(n) = x(n/M), M \in \mathcal{N}$ (要补零)；
Z变换 $X_{1/M}(z) = X(z^M)$ ROC变化！

复分析回顾：留数与积分公式

积分公式

- 柯西定理：解析函数 $\oint_C f(z)dz = 0$
- 柯西积分公式： $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$
特别 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

留数

- Laurent级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz$ 称为在极点 z_0 处的留数 $Res(z_0)$ ；
一般 $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.
- 留数定理： $\oint_C f(z)dz = 2\pi i(Res(z_0) + Res(z_1) + \dots)$.
- 有理函数 $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ 在简单极点(一阶) z_0 处留数为
 $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) = \frac{N(z_0)}{D'(z_0)}$

逆Z变换

Theorem (逆Z变换公式)

$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$, C 为收敛域内一封闭曲线。

Corollary

离散时间傅立叶变换(DTFT)的逆变换:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega})e^{i\omega n}d\omega$$

计算方法:

- 有理分式展开 $X(z)/z = \frac{N(z)}{D(z)}$
- 幂级数展开, $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$ 长除法;
- 直接计算: 利用简单函数的Z变换的运算。

离散LTI系统

离散线性时不变系统(LTI)

Theorem

离散线性时不变系统(LTI)是卷积系统: $y(n) = x(n) * h(n)$ $h(n)$ 是 $\delta(n)$ 的单位冲激响应。

Outline: $x(n) = \sum x(m)\delta(n-m), \delta(n-m) \rightarrow h(n-m)$.

- 离散系统基本运算: 单位延时, 加法器, 放大器。
- 复杂系统: 系统的并联(响应函数加法), 串联(响应函数卷积复合);
- LTI因果系统当且仅当 $h(n)$ 是因果序列
- LTI稳定当且仅当 $\sum |h(n)| < +\infty$

一般模型(ARMA): 可以看成是一个常系数差分方程

$$\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j).$$

离散LTI系统的传递函数

Definition (传递函数)

一个离散LTI的输入输出信号Z变换的比值 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 称为系统的传递函数或系统函数。

特别: 有理传递函数 $\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j)$, 则 $H(z) = \frac{\sum a_j z^{-j}}{\sum b_i z^{-i}}$

- $H(z)$ 的逆z变换是 $h(n)$.
- LTI因果系统 等价: 传递函数的ROC为某个圆外部。有理系统: 分子不大于分母的阶;
- LTI稳定 等价: 传递函数的ROC包含单位圆。因果有理系统: 极点在单位圆内。

系统频率响应

$$H(z) = |H(z)|e^{i\arg H(z)}, \arg(H(z)) = \arctan(H_i m(z)/H_r e(z))$$

特别 $Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})e^{i\omega n}$, 是系统对正弦信号的响应。

系统的分类

有理传递函数频率响应: $H(e^{i\omega}) = \frac{p_0}{d_0} e^{i\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{i\omega} - \xi_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{i\omega} - \lambda_k)}$,

幅度响应 $|H(e^{i\omega})| = \left| \frac{p_0}{d_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |e^{i\omega} - \xi_k|}{\prod_{k=1}^N |e^{i\omega} - \lambda_k|}$

相位响应 $\theta(\omega) = \arg H(e^{i\omega}) =$

$$\arg \frac{p_0}{d_0} + \omega(N-M) + \sum_{k=1}^M \arg(e^{i\omega} - \xi_k) - \sum_{k=1}^N \arg(e^{i\omega} - \lambda_k)$$

- 按幅度响应分类: 理想滤波函数: 低通, 高通, 带通, 带阻; 有界实传递函数BR: $|H(e^{i\omega})| \leq 1$, 特别无损系统如果能量不变。全通传递函数: $|H(e^{i\omega})| = 1$
- 按相位响应分类: 零相位传递函数: $\theta(\omega) = 0$ 不存在零相位因果滤波器。线性相位传递函数: $H(e^{i\omega}) = e^{-i\omega D}$, 群延迟 $\tau(\omega) = D$ ***最小最大相位传递函数: 所有零点 $|\xi_k| < 1$ 称为最小相位; 反之最大相位; 不一定则是混合相位;
- 对有理传递函数 $H(z) = N(z)/D(z)$, 按响应项数分类: FIR: 有限冲激响应 $D(z) = 1$, $h(n)$ 有限项; 又称为全零点滤波器; IIR: 无穷冲激响应 $D(z) \neq 1$, $h(n)$ 无限项; 又称为递归滤波器;

简单滤波器:MA,MD

移动平均滤波器 $y(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$

- DC直流信号 $x(n) = 1 \rightarrow y(n) = 1$, AC交流信号 $x(n) = (-1)^n \rightarrow y(n) = 0$.
- 一般频率信号 $e^{inw} \rightarrow (0.5 + 0.5e^{-inw})e^{inw}$.
- $H(e^{iw}) = 0.5 + 0.5e^{iw} = e^{-iw/2} \cos(w/2)$ 是低通滤波器。特别是线性相位滤波器。

类似：移动差分滤波

器 $y(n) = 0.5x(n) - 0.5x(n-1), H(e^{iw}) = e^{-iw/2} i \sin(w/2)$.

Proposition (对称得到线性相位)

如果 $h(k) = h(N-k)$, 则 $H(w) = e^{-iWN/2} |H(w)|$, 特别 $|H(w)|$ 是偶函数。

语音信号预处理: $y(n) = x(n) - ax(n-1), 0 < a \leq 1$.

$|H(e^{iw})| = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos w}$ 是关于 $w \in [0, \pi]$ 的增函数。(放大高频)。

数字滤波器设计过程

目标：构造传输函数 $G(z)$ 逼近指定的频率响应。

- 设计指标：参数 $\omega_p, \omega_s, \delta_p, \delta_s$
- 确定滤波器类型：FIR, IIR
- 确定滤波器的阶数：N
- 给出滤波器的系数： $P(z), P(z)/Q(z)$
- 利用计算机迭代优化系数。

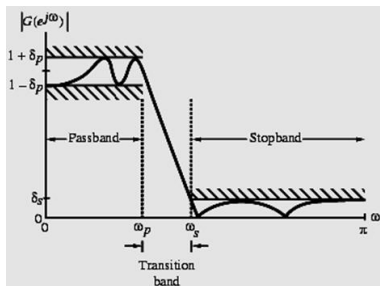
注记：构造可逆复变换 $s = F(\hat{s})$ 得到频率变换。不同频率响应的滤波器可以转换为低通滤波器；

高通 $\Omega = -\frac{\Omega_p \hat{\Omega}}{\hat{\Omega}}$, $\hat{\omega} = -1/\omega$

带通 $\Omega = -\Omega_p \frac{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}{\hat{\Omega} B_\omega}$, $\hat{\omega} = \omega - 1/\omega$

带阻 $\Omega = \Omega_s \frac{\hat{\Omega} B_\omega}{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}$, $\hat{\omega} = \frac{1}{\omega - 1/\omega}$

低通数字滤波器设计指标

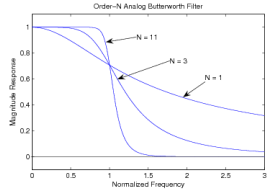


- 通带截止频率 ω_p , 阻带截止频率 ω_s
- 通带
上 $|\omega| \leq \omega_p, 1 - \delta_p \leq |G(e^{i\omega})| \leq 1 + \delta_p$
阻带上 $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi, |G(e^{i\omega})| \leq \delta_s$
- 峰波纹值 δ_p, δ_s 用损益函数表示 $\alpha_p = -20 \lg(1 - \delta_p) dB$, $\alpha_s = -20 \lg(\delta_s) dB$, 称为通带峰值波纹, 最小阻带衰减。
- 单位化：设幅度最大值为1；通带波纹表示 $1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$ ；阻带波纹表示 $1/A$
- ***其他参数：选择性参数： $k = \omega_p/\omega_s < 1$
分辨参数： $k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \ll 1$.

数字滤波器的设计方法

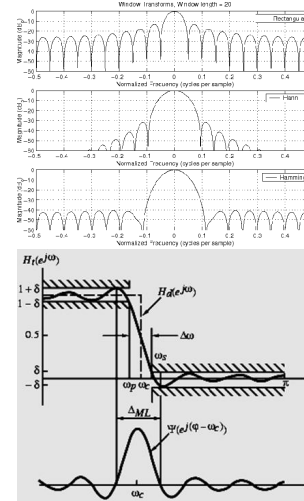
- FIR: 各种窗口估计公式；调整系数；。。。
fir1, firpm, fircls;
- IIR: 利用成熟的模拟滤波器设计。
 - ① 数字频率响应指标转化到模拟频率域；
 - ② 常用模拟滤波器的多项式阶估计；
 - ③ 双线性变换回到数字频率域；

FIR窗函数设计: Butterworth滤波器



- $|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$,
- $\Omega = 0$ 最大; Ω_c 是3dB截止频率; 特别 $G(2\Omega) \approx G(\Omega) - 6NdB$ 。
- 由 Ω_c, N 决定。
 $\frac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = 1/(1 + \epsilon^2)$,
 $\frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = 1/A^2$;
 $N = \frac{1}{2} \frac{\lg((A^2-1)/\epsilon^2)}{\lg(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\lg k_1}{\lg k}$
- 一般可以写成 $H(s) = \frac{C}{D_N(s)} = \frac{\Omega_c^N}{\prod(s-p_i)}$. 可以查表或用MATLAB得到。
- 特征: 通带,阻带内单调;

常见窗函数



- 矩形窗函数: $\omega[n] = 1$
- Bartlett(三角形): $\omega[n] = 1 - |n|/(M + 1)$;
- Hanning:
 $\omega[n] = 0.5(1 + \cos(2\pi n/(2M + 1)))$;
- Hamming:
 $\omega[n] = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/(2M + 1))$
- Blackman:
 $\omega[n] = 0.42 + 0.5 \cos(2\pi n/(2M + 1)) + 0.08 \cos(4\pi n/(2M + 1))$;
- Ω 的形状参数: 主瓣宽度 Δ_t , 相对旁瓣级 A_d .
 逼近主瓣宽度,过渡带宽
 $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p \approx \frac{c}{M}$, c 为常数。
 $c = 4\pi, 8\pi, 12\pi \dots$ 一般 δ 是常数。

FIR:最佳滤波器

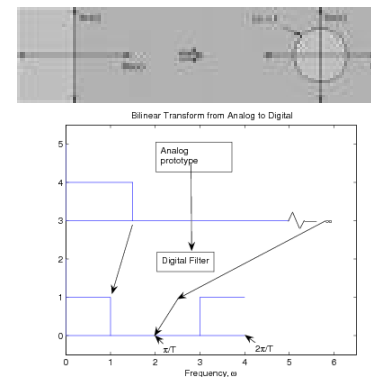
等波纹滤波器 equi-ripple

- 极小极大逼近: 最大错误(通带和阻带)都一样。 $\max_w |Ideal(w) - H(w)|$
 一般用对称滤波器
- 交错定理: d 阶多项式逼近, 至多出现 $d + 2$ 次交错。
- 阶的选定: Kaiser公式 $N = \frac{\alpha_s - 8}{2.285(\Delta\omega)}$ 。
- 算法: Parks-McClellan算法(特别Remez迭代算法)
- MATLAB `firpmord()`, `firpm()`

最小二乘滤波器

- MSL 极小化错误 $R = \int |ideal(w) - H(w)|^2 dw$
- 主要障碍: Gibbs现象:
- 可用Levinson-Durbin 迭代算法。
- MATLAB: `firls()`

IIR滤波器设计: 双线性变换



Definition

从模拟频率域到数字频率域的变换
 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
 对应的数字传递函数 $G(z) = H(s)|_{s=**}$

Proposition

- $s = a + bi, z = \frac{1+(a+bi)T/2}{1-(a+bi)T/2}$
- 虚轴映到单位圆; 频率谱一一映射
- 代入 $z = e^{i\omega}$, 频率关系 $\Omega = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega}{2})$

双线性变换一般可以简化: 令 $T = 2$,
 $z = \frac{1+s}{1-s}$.

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- 其他抽样定理(频域,矩形抽样);
- 拉普拉斯变换及其应用;
- 数字滤波器设计的其他方法; (MATLAB中)
- 数字滤波器设计的窗函数选取与比较;
- 交错定理的证明: d 阶多项式逼近, 至多出现 $d + 2$ 次交错。
- *firpm*中 Parks-McClellan算法;
- *firls*中算法;
- 简单的数字滤波器应用;

信号处理的数学方法
aka 信号与系统的数学方法
Mathematical Methods in Signal Processing

张思容

zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

May 15, 2011

回顾

- ▶ 连续信号, 连续时间系统: 傅立叶分析与函数空间
模拟信号处理: 逼近理想滤波器(Butterworth滤波器)
- ▶ 离散信号, 离散时间系统: Z变换 与 复级数
数字信号处理: 构造 $h(n)$,使得 $H(e^{j\omega})$ 逼近理想滤波器(等波纹滤波器)
- ▶ 有限信号, 矩阵变换: 矩阵基变换 \rightarrow 稀疏矩阵
信号的传递与压缩: 寻找合适信号的合适的基? 小波基。稀疏信号

Chapter 4: 有限信号与稀疏变换 Finite signals and sparse transformation

离散傅立叶变换

DFT

FFT

离散余弦变换

小波变换

Harr小波

滤波器组的构造

小波基和稀疏表示

参考书: 数字信号与图像处理: 第四章

G.Strang: Computational Science and engineering:

从离散信号到有限信号

实际应用中必然是有限的抽样信号: $x(t) \rightarrow x(n) \rightarrow x[M]$

- ▶ 得到有限信号的方法: 截断。
时间域: $x[M] = x(n) \cdot G(N)$,其中 $G(N)$ 为长为 N 的矩形脉冲。
频率域: $X_N(\omega) = X(\omega) * \text{sinc}(\omega)$;
- ▶ 问题: 卷积产生频率泄漏。
有限信号的频率谱是无穷的!

从有限信号得到离散谱

- ▶ 周期延拓的信号 \rightarrow 离散谱
- ▶ 加零后周期延拓;
- ▶ 对称扩张后周期延拓;

离散傅立叶变换DFT

- ▶ 有限序列 $x[n]$, 傅立叶谱 $X[k]$, 频率 $W_N = e^{-i2\pi/N}$;
- ▶ 离散傅立叶变换(DFT) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$, $k \in [0, N-1)$
- ▶ 离散傅立叶逆变换(IDFT) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$
- ▶ 矩阵表示:

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

- ▶ 变换公式 $X = D_N x$, 逆变换 $x = \frac{1}{N} D_N^* X$.
矩阵是Vandemonde矩阵!

DFT的计算

计算复杂度:

- ▶ 计算所有变换样本要 N^2 个复数乘法, $N(N-1)$ 复数加法。
即 $4N^2$ 个实数乘法, $(4N-2)N$ 实数加法;
- ▶ 计算一个变换样本(常用Goertzel算法:)(线性滤波器方法)
利用 $W_N^{-kN} = 1$, DFT可以写成序列的卷积;
 $X[k] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] W_N^{kl} = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] W_N^{-k(N-l)}$
 $X[k] = y_k[n]|_{n=N}, y_k[n] = \sum_{l=0}^n x[l] W_N^{-k(n-l)}, x_e[n] = x[n], h_k[n] = W_N^{-kn}$ 计
算 $y_k[n] = x_e[n] \otimes h_k[n]$, 即 $Y_k(Z) = \frac{X_e(Z)}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}}$;
递推公式: $y_k[n] = x[n] + W_N^{-k} y_k[n-1], 0 \leq n \leq N$
算法复杂度: $2N$ 个实乘法, $2N$ 个实加法; $X[k], X[n-k]$ 的
对称性;

DFT性质

- ▶ 傅立叶谱 $X[k]$ 是离散的周期谱。(是单位圆上的 N 点抽样)
 N 的选取问题: $x(N)$ 的 N 点DFT与 $x(N)$ 加零后 $2N$ 点DFT差别? 一般依赖与信号的短时平稳性。
- ▶ 对称与共轭: $W_N^k = -W_N^{N/2+k}, W_N^N = 1$
特别实序列有: $X[N-k] = X[k]^*$
- ▶ 周期(或循环)卷积: $x[n] * y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(N-i)$
- ▶ Parseval 等式。

DFT矩阵

DFT矩阵:

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

MATLAB实现 $j = 0 : N - 1; k = j'; F = w. \wedge (k * j)$
 $D = fft(eye(N));$

- ▶ 矩阵的列向量是正交的! 为什么? 是某个对称矩阵(二阶差分)的特征向量! 参见DCT部分
- ▶ 例子: $D_4(\delta) = (1, 1, 1, 1), D_4(DC) = \delta$
 $D_4(\sin) = (0, 1/2i, 0, -1/2i)$. 离散余弦变换DCT是实变换!

DFT矩阵分解

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

一般的 $F_{2N} = \begin{bmatrix} I_N & A_N \\ I_N & -A_N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_N & \\ & F_N \end{bmatrix} * [\text{even-odd permutation}]$

其中 A_N 是对角阵 $(1, w, w^2, \dots, w^N)$.

计算量: 只有 N 次对角阵计算!!! 递推有 $cN \log N$ 次运算!

注: 每个矩阵是稀疏矩阵!

FFT的实现

- ▶ 设信号为 c_k , 分解为奇偶 c_k^1, c_k^2
- ▶ 变换有 $f^1 = D_N c^1, f^2 = D_N c^2$;
- ▶ 则计算有 $f_j = f_j^1 + w^j f_j^2, 0 \leq j \leq N-1$
 $f_j = f_j^1 - w^j f_j^2, N \leq j \leq 2N-1$

MATLAB实现

$$f^1 = \text{fft}(c(0 : 2 : 2N - 2)) * N;$$

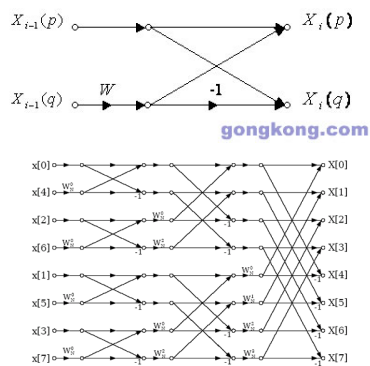
$$f^2 = \text{fft}(c(1 : 2 : 2N - 1)) * N;$$

$$A = w . \wedge (0 : N - 1)';$$

$$f = [f^1 + A .* f^2, f^1 - A .* f^2].$$

例子: D_{1024} 的分解。

不同形式的FFT



- ▶ DIT 按时间抽
取: $X[k] = P(k/2) + W_N^k S(k/2)$
Cooley-Turkey 算法(1965),
Gauss(1805);
注意: 输出的信号顺序即二进制表示的逆序!
- ▶ DIF 按频率抽取 $X[2k] = \sum(x(j) + x(j + N/2)) W^{jk}; X[2k+1] = \sum(x(j) - x(j + N/2)) W^{jk}$
- ▶ 基4的算法, 可以不用乘法!
- ▶ FFTW: 参见网站;
- ▶ 应用: 卷积计算(多项式计算);

有限信号模型

离散信号到有限信号?

- ▶ 离散信号FIR系统: $y(n) = \sum_{k=1}^M x(n-k)h(k)$
矩阵表示: $\vec{y} = T\vec{x}, T$ 是 Toeplitz 矩阵。
(常对角线矩阵)
- ▶ 周期延拓信号:(DFT) Toeplitz 矩阵 \rightarrow 循环矩阵
- ▶ 加零: 边界频率泄漏?
- ▶ 对称延拓: DCT Toeplitz 矩阵 \rightarrow 特别的对称矩阵

傅立叶变换:

- ▶ 傅立叶变换矩阵 $D_N = (w^{jk})_{N \times N}, w = e^{-i2\pi/N}$
记 $v_k = (w^{0k}, w^{1k}, \dots, w^{(N-1)k})$. 则 v_k 为一组正交基;
 D_N 即基变换;
- ▶ 最重要特性: v_k 为所有 Toeplitz 矩阵的特征向量。
- ▶ 有限信号 $D_N \vec{y} = D_N T \vec{x} = \Lambda D_N \vec{x}$

有限信号例子

▶ 二阶差分矩阵 $A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 傅立叶矩阵

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 & j^3 \\ 1 & j^2 & j^4 & j^6 \\ 1 & j^3 & j^6 & j^9 \end{bmatrix}$$

▶ B 的特征根: 0, 0.5, 1, 0.5, 即 FIR 系数的傅立叶变换 $h = (2/4, -1/4, 0, -1/4)$
 $Y = HX$

▶ 二阶平均矩阵 $B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

注意: 有相同的特征向量和相同的特征值!(但顺序不同)

寻找实系数的傅立叶变换?

历史:

- ▶ 连续信号: 实的偶函数的傅立叶变换是实系数的(余弦变换);
- ▶ 离散信号: 直到1974: Rao发现 DCT2 (用于逼近 Karhunen-Loeve 基, 信号压缩)
- ▶ 1985 Wang 给出8种 DCT 形式;
- ▶ 注记: 离散问题比连续问题有更多的复杂性(边界条件)

傅立叶变换矩阵作为差分矩阵的特征向量矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- ▶ v_k 是特征向量, 特征值 $\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{N}$
- ▶ 特别: A_0 是实对称矩阵, 不同特征向量是正交, 可以选取为实特征向量。注意 $\lambda_k = \lambda_{N-k}$.
- ▶ $c_k = \text{Re}(v_k) = (1, \cos \frac{2k\pi}{N}, \dots, \cos \frac{2(N-1)k\pi}{N});$
- ▶ $s_k = \text{Im}(v_k) = (1, \sin \frac{2k\pi}{N}, \dots, \sin \frac{2(N-1)k\pi}{N});$
- ▶ 不足: c_k 的长度不一样。 $c_0, c_{N/2}$ 是 \sqrt{N} , 其他是 $\sqrt{N/2}$!

有限信号的边界条件

连续信号的边界条件:

- ▶ 连续信号 $[0, \pi]$ 做偶延拓; 微分方程: $u'' = -u$,
- ▶ 零点边界条件: Neumann 条件 $u'(0) = 0$
- ▶ π 点边界条件对应不同特征函数(特征值):
Neumann 条件 $u'(\pi) = 0 \rightarrow \cos kx$
或 Dirichlet 条件 $u(\pi) = 0 \rightarrow \cos(k + 1/2)x$

有限信号的边界条件:

- ▶ 差分方程: $A_0 v = -v$
- ▶ 离散对称延拓: 全样本延拓(meshpoint) u_1, u_0, u_1
半样本延拓(midpoint) u_1, u_0, u_1
- ▶ 两种边界条件, 两种延拓, 两个端点一共有8种 DCT 变换;
一般: 取两端点的延拓方式一样, 有 DCT1-4;
不一样有 DCT5-8; (称为 odd DCT) 不常用;

离散余弦变换的差分矩阵 DCT2

$$A_0 = \begin{bmatrix} * & * & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & ** & ** \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ 零点取 midpoint 延拓; $u_{-1} = u_0$
矩阵第一行为 $(1 - 1 \dots)$;
- ▶ 零点取 meshpoint 延拓; $u_{-1} = u_1$
矩阵第一行为 $(2 - 2 \dots)$;
- ▶ π 点取 Neumann 条件; 最后一行同上两种可能;
- ▶ π 点取 Dirichlet 条件; 取 midpoint 延拓; $u_N = u_{N-1}$;
矩阵最后一行: $(\dots - 13)$;
- ▶ π 点取 Dirichlet 条件; 取 meshpoint 延拓; $u_N = 0$;
矩阵最后一行: $(\dots - 12)$;

特别 DCT2: 两端都取 midpoint 和 Neumann 条件!

离散余弦变换矩阵DCT2

DCT2

- ▶ 特征向量:
 $c_k = (\cos(1/2)k\pi/N, \cos(1/2)k\pi/N, \dots, \cos(N-1/2)k\pi/N)$;
特征值: $2 - 2\cos(k+1/2)\pi/N$;
- ▶ DCT2矩阵元 $(\frac{1}{\sqrt{N}} \cos(j+1/2)k\pi/N)$, $0 \leq j, k \leq N-1$.
特别是它是正交矩阵!
- ▶ 称其中心(延拓)为 $-1/2, N-1/2$, 长度为 N
- ▶ 计算: 可以用FFT实现;
- ▶ 应用: JPEG压缩; 选取 8×8 图像块, 得到DCT2系数; 压缩(传递), IDCT恢复;
对于有相关性的信号有很好的压缩功能!

寻找更好的基变换?

选取基的主要要求:

- ▶ 计算速度: FFT, FWT
- ▶ 精确逼近: sparse 稀疏信号
- ▶ 正交性: $F^{-1} = (F^T)^*$ 可以没有!

重要例子:

- ▶ 连续光滑信号: 傅立叶基, 问题: Gibbs现象!
- ▶ 有间断点的信号(图像): 小波基
- ▶ 有限元方法: 分段线性多项式;
- ▶ 样条逼近: 分段光滑多项式;
- ▶ 其他基: 微分方程求解 Bessel函数, ...

离散余弦变换矩阵及其他

- ▶ DCT1,3要做正交化(特征向量长度不一样),DCT4可以;
- ▶ DCT5-8的基向量"长度"为 $N \pm 1/2$ 不方便计算; (可以对称扩充)
- ▶ 推广: Malvar的Modulated-lapped变换: 构造相交的覆盖图像块用于图像变换; Dolby AC-3.可用DCT4,8;
- ▶ 注记: 取不同的差分矩阵, 利用特征向量可以得到新的矩阵, 可能有新的更好的基变换?
- ▶ 基选取依赖于: 数学, 计算, 和信号
视觉信号与小波基的选取是自然的, 人眼看到的是小波!!!

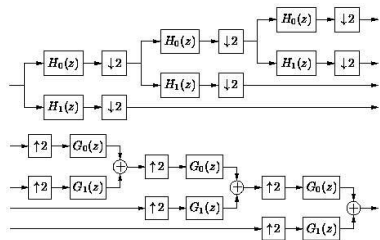
Harr小波

- ▶ 信号: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 4, 5, 1)$
- ▶ 低通滤波器: 移动平均 $y = (x_1 + x_2)/2, (x_3 + x_4)/2$
- ▶ 高通滤波器: 移动差分 $z = (-x_1 + x_2)/2, (-x_3 + x_4)/2$
- ▶ 恢复信号: $y, z \rightarrow x$
- ▶ 可迭代应用滤波器: $yy = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$,
 $zy = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4$;再恢复信号;
- ▶ 可压缩信号!

小波变换

- ▶ 信号: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
- ▶ 低通滤波器+降抽样: $y = (5, 3)$
- ▶ 高通滤波器+降抽样: $z = (-1, -2)$
- ▶ 迭代应用滤波器+降抽样: $yy = 4, zy = 1$;
- ▶ 得到小波系数 $(4, -1, -1, -2)$
- ▶ 恢复矩阵:

滤波器组与小波变换



$$H = \begin{bmatrix} * & * & & & \\ h_0(0) & h_0(1) & * & & \\ & h_0(0) & h_0(1) & * & \\ h_1(0) & h_1(1) & * & & \\ & h_1(0) & h_1(1) & * & \\ * & * & & & \end{bmatrix}$$

- ▶ 信号 → (两通道)解析滤波器组 → 小波系数 (高通滤波器的结果)
小波系数 → 合成滤波器组 → 恢复原信号。
- ▶ 矩阵变换:(其中 h_0, h_1 为 FIR 滤波器系数) $Hx = y$
- ▶ 快速小波变换FWT: 迭代应用解析滤波器, 注意 $H_{1/2}$ 作用在一半长度的信号上。 $\dots H_{1/4} \cdot H_{1/2} \cdot Hx = y$
乘法次数: 达到快速算法的HolyGrail!
($LN + L * N/2 + L * N/4 + \dots$) = $2LN = O(N)$, 其中 L 为滤波器长度, N 为信号长度。
- ▶ 类似合成滤波器组可得逆小波变换!

条件PR: 构造离散小波基

Daubechies: 双正交, 存在 $\widetilde{W} \cdot W = Id$.

设解析滤波器组 h_0, h_1 , 合成滤波器组 f_0, f_1 .

条件PR: $F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-l}$

$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$

- ▶ 因果系统的完全重构等价于频率响应是一个 l 阶延迟, 见方程一。Harr小波延迟为1。
- ▶ 上下抽样产生混叠频率 $w + \pi$, 必须消去等价于方程二。 $e^{i(w+\pi)} = -e^{iw}$
- ▶ 简单选取: $F_0(z) = H_1(-z), F_1(z) = -H_0(-z)$, 定义乘积低通滤波器 $P_0(z) = F_0(z)H_0(z)$, 等价条件: $P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-l}$.
特别: $P_0(z)$ 的多项式的奇数阶系数除 z^{-l} 外都为零。
- ▶ 正规化滤波器(half-band) $P(z) = z^l P_0(z)$, PR条件为 $P(z) + P(-z) = 2$

例子: 5/3滤波器, $h_0 = (-1, 2, 6, 2, -1)/8, f_0 = (1, 2, 1)/2$
 $h_1 = (1, 2, 1)/4, f_1 = (1, 2, -6, 2, 1)/4$.

从Harr小波到其他

从有限矩阵到无穷滤波器

- ▶ Harr小波来源于 DFT_2 , 注意一般的有Walsh变换(矩阵元素全为1, -1)。
- ▶ Harr小波需要用低通, 高通滤波器(无穷维)和上下抽样运算;
- ▶ 信号的边界需要扩张(对称, 加零, 周期);

Proposition (上下抽样的频率响应)

$$(\downarrow 2)(e^{iwn}) = \frac{1}{2}(e^{iwn/2} + e^{i(w/2+\pi)n}), (\uparrow 2)(e^{iwn}) = e^{i2wn}$$

$$\text{特别 } (\uparrow 2)(\downarrow 2)(e^{iwn}) = \frac{1}{2}(e^{iwn} + e^{i(w+\pi)n})$$

附: 小波常用对称扩张, 特别信号的扩张方式(奇或偶扩张)与低通滤波器的对称性一致!

Harr小波是唯一对称, 正交小波。

滤波器设计例子

滤波器组设计: 选取 $P_0(z)$, 选取 H_0 . 得到 H_1, F_0, F_1 .

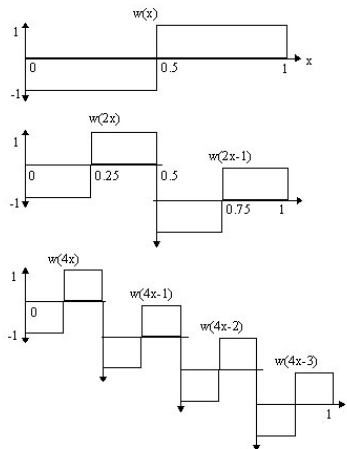
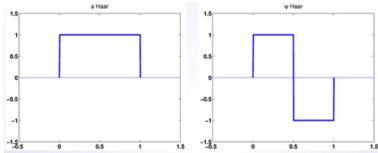
EXAMPLE (maxflat 滤波器)

乘积滤波器 $P_0(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6})$ 6个零点: 4阶 $z = -1$, 及 $c = 2 + \sqrt{3}, 1/c$

- ▶ 2/6滤波器或(6/2): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})/z, \frac{1}{2}(1, 1), \frac{1}{8}(-1, 1, 8, 8, 1, -1)$
- ▶ 3/5滤波器或(5/3): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})^2/z^2, \frac{1}{4}(1, 2, 1), \frac{1}{4}(-1, 2, 6, 2, -1)$
- ▶ 4/4正交滤波器(Daubechies): 取 $H_0(z) = (1 + z^{-1})^2(c - z^{-1})/z^3, \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}), \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

注意: 一般取 H_0 系数和为1, F_0 的系数和为2. 常用5/3, 6/2滤波器。特别JPEG2000使用9/7, 5/3滤波器。

傅立叶变换VS 小波变换



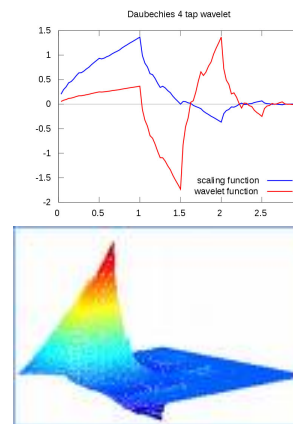
- ▶ 连续信号: 傅立叶基 $\cos t, \sin t \rightarrow w(t), \phi(t)$
- ▶ 傅立叶变换: 时间到频率域, 小波变换: 时间域到 多尺度分解(局部时频信号)
- ▶ **Harr小波**:(解见图像)
平均: $\Phi(t) = \Phi(2t) + \Phi(2t-1)$
细节: $w(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$
迭代有: $w_{jk}(t) = 2^j w(2^j t - k)$
- ▶ 小波基的优点: 局部基, 可加细(refine), 快速, 有限逼近(!!). 有限元和样条函数仅实现前三条.

离散小波基的构造

利用 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi(2t-k)$, 构造 h_0 , 求解 $\phi(t)$,
 ***从而可得 h_1 , 以及合成滤波器组的低通, 高通滤波器 f_0, f_1 .
 基本问题:

1. 存在性: 尺度方程有解的充分条件(条件E)
泛函分析: 等价于 $\phi(t-k)$ 是一组稳定基(Riesz basis).
2. 精确逼近: 有限项逼近的充分条件(条件 A_p)
3. 完全重构(双正交基): 存在合成滤波器组 Perfect Reconstruction (条件PR)
4. (***) 正交基: 条件O

L^2 空间的小波基与尺度方程



- ▶ L^2 函数的小波分解:
 $f(t) = \sum a_k \phi(t-k) + \sum \sum b_{jk} w_{jk}(t)$
- ▶ 尺度方程(refinement equation)
 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi(2t-k)$
小波方程 $w(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_1(k) \phi(2t-k)$
注意: h_0, h_1 即滤波器系数!
- ▶ 尺度方程的解: 简单形式即B样条函数(Harr小波的复合) 一般连续形式的解很复杂, 见Daubechies 小波1D解和2D解。
- ▶ 小波空间的分解: $V_0 = \{\sum a_k \phi(t-k)\}$,
 $W_0 = \{\sum c_k w(t-k)\}$,
 $V_1 = \{\sum b_k \phi(2t-k)\}$.
尺度方程+小波方程 $\rightarrow V_0 + W_0 = V_1$,
依次有 $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_\infty = L_2$
- ▶ 一般用滤波器实现离散小波变换!

条件E和条件 A_p

条件E: $T = 2(\downarrow 2)H_0H_0^T$ 的所有特征根 $\lambda < 1$, 除一个简单特征根为1

- ▶ Cascade算法: $\phi^{i+1}(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k) \phi^i(2t-k)$
 $\phi^0(t)$ 可取 $[0, 1]$ 上矩形波。定理: $\phi(t)$ 的紧致支集为 $[0, L]$. 参见 cascade.m
- ▶ 例子: 收敛 $h_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \rightarrow$ hat函数
Daubechies: $h_0 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$
不收敛: $h_0 = (2/3, 1/3)$
- ▶ 必要条件: 频率响应 $H_0(\pi) = 0$, 过滤AC信号!

条件 A_p : $M = (\downarrow 2)2H$ 有 p 个特征根 $1, 1/2, \dots, (1/2)^{p-1}$.

- ▶ f 的 p 阶逼近: 任一 f 与其投影到小波空间 V_p 中像的误差充分小。
即 $|f(t) - \sum a_{jk} \phi_{jk}(t)| \leq C 2^{-jp} |f^{(p)}(t)|$
- ▶ 等价条件1: 频率响应 $H_0(z)$ 有一个 p 阶零点在 $z = e^{i\pi}$.
等价条件2: $\sum_{k=0}^L (-1)^k k^m h(k) = 0, m = 0, 1, \dots, p-1$

$f(t) \approx \sum c_k \phi_k(t)$: 针对不同信号怎样寻找合适的基?

- ▶ 线性变换: 选取前 N 个系数: (使用傅立叶基或小波基)
- ▶ 非线性变换: 选取前 N 个最大的系数: 正交搜索(basis pursuit)
- ▶ 稀疏变换: 极小化能量 $\|f - \sum c_k \phi_k\| + \alpha \sum |c_k|$ (Lasso)
注意: 稀疏表示要求 l_0 范数小, 但用 l_1 范数更好算,
且 Donoho 等证明: 概率意义下, 用 l_1 范数找到的是正确的。
- ▶ 光滑表示: 极小化能量 $\|f - \sum c_k \phi_k\| + \alpha \|\sum c_k \phi_k\|_{TV}$
Total Variation 范数常用于图像处理。

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- ▶ 基为4或其他的FFT变换;
- ▶ FFT的应用;
- ▶ DCT4或其他类型的DCT变换;
- ▶ JPEG的DCT算法简介;
- ▶ 简单小波(B样条)的例子和应用;
- ▶ JPEG2000的DWT算法简介;
- ▶ 图像降噪的小波方法;

信号处理的数学方法
aka 信号与系统的数学方法
Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
Department of Mathematics, Beihang University

May 26, 2011

真实世界的信号处理

真实信号=理想信号+噪音信号= $x(t) + e(t) \rightarrow h(n) \rightarrow x(t)$ 恢复信号

- ▶ 真实信号: 包含不确定性, 不可完全预期其值。
信号表示: (离散)随机过程。含时间变量的随机变量 $x(t, \xi)$
理想信号: 函数空间表示; L^2
噪音信号: 最简单是白噪音随机过程(完全不可预期);
常见噪音: 电线交流电噪音60赫兹, 图像的椒盐噪音等等;
- ▶ 统计信号处理: 信号的平均的统计特征是确定的, 可以利用统计数据统计量估计信号的统计特征。
主要内容: 信号分析(谱估计)
信号滤波(线性滤波Wiener滤波器, 最小二乘, 自适应滤波, Kalman滤波).
应用: 语音处理, 去噪, 信号预测, 识别等。

随机信号模型

随机信号
谱分解与ARMA模型
模型的参数和估计

最小二乘与滤波器算法实现

最小二乘与滤波器
最小二乘的递推算法举例
维纳滤波器的Levinson算法

参考书:

张旭东等: 离散随机信号处理, 清华大学出版社。2005
G.Strang: Computational Science and engineering:

随机变量

Remark (随机变量)

- ▶ 概率空间: (X, S, P)
- ▶ 随机变量是一个映射: $x: X \rightarrow R$, 使得 $\{x(\xi) < a\}$ 是个事件(可测集);
- ▶ CDF分布函数: $F_x(a) = Pr(x(\xi) < a)$ PDF密度函数 $f_x(a) = F'(a)$

Remark (随机向量)

- ▶ M 维随机向量: $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$
- ▶ CDF分布函数: $F_{\text{bar}x}(\bar{a}) = Pr(x_i(\xi) < a_i, 1 \leq i \leq M)$
PDF联合密度函数 $f_x(\mathbf{a}) = \partial_{x_1} \dots \partial_{x_M} F(\mathbf{a})$
- ▶ 边际密度函数: $f_{x_i} = \int \dots \int f_x(\mathbf{a}) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_M$.
独立随机变量: $f_{x_1, x_2}(a, b) = f_{x_1}(a) f_{x_2}(b)$

随机变量的特征

Remark (统计特征)

- ▶ 期望: $E(x) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} af_x(a)da$
- ▶ 方差: $\sigma_x^2 = \text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (a - \mu_x)^2 f_x(a)da$
标准方差: σ_x ;
- ▶ moments: $r^m = E((x - \mu_x)^m) = \int_{-\infty}^{\infty} (a - \mu_x)^m f_x(a)da$ 高阶矩。
三阶矩: skewness 倾斜率, 四阶矩: kurtosis 峰度
特征函数: $\Phi_x(s) = E(e^{xs}) = \int f_x e^{sa} da$

EXAMPLE

- ▶ 均匀分布: $f_x(t) = 1/(b - a), a \leq t \leq b, \mu_x = (b + a)/2,$
 $\sigma_x = (b - a)^2/12$
- ▶ 高斯分布: $f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$

离散随机过程

Definition (离散随机过程)

给定样本空间 $X = \{\xi_k\}$, 取一系列数 $x(n, \xi_k)$ 称为离散随机过程或离散随机序列。

固定 n , $x(n, \xi_k)$ 是一个随机变量; 固定 ξ_k , $x(n, \xi_k)$ 是一个样本序列;

Proposition (描述)

- ▶ 联合概率分布: $F(x_1, \dots, x_M; n_1, \dots, n_m) = Pr(x(n_i) \leq x_i, 1 \leq i \leq M)$
- ▶ 统计特征: $\mu(n) = E(x(n)), \sigma(n)$;
- ▶ 自相关矩阵: $r(n_1, n_2) = E(x(n_1)x(n_2))$
自协方差矩阵: $\gamma(n_1, n_2) = r(n_1, n_2) - \mu(n_1)\mu(n_2)$

IID: 互相独立的随机过程; 不相关过程; 正交过程; 周期过程;

相关矩阵

Remark (随机向量统计特征)

- ▶ 期望向量: $\mu_x = (\mu_1, \dots, \mu_M)$
- ▶ 自相关矩阵: $R_x = E(\bar{x}(\xi)\bar{x}'(\xi)) = [r_{ij}]$
自协方差矩阵: $\Gamma_x = E(x - \mu_x)(x - \mu_x)' = \gamma_{ij} = R_x - \mu_x\mu_x'$
- ▶ 互相关矩阵: $R_{xy} = E(\bar{x}(\xi)\bar{y}'(\xi)) = [r_{ij}]$
互协方差矩阵:
 $\Gamma_{xy} = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)' = \gamma_{ij} = R_{xy} - \mu_x\mu_y'$

Proposition (相关性)

x, y 是不相关的如果 $\Gamma_{xy} = 0$

x, y 是正交的, 如果 $R_{xy} = 0$

x, y 是独立的, 如果 $f_{x,y}(a, b) = f_x(a)f_y(b)$

平稳随机信号

随机过程 $x(n)$ 与 $x(n+k)$ 的统计量相同。

Definition (SSS严格平稳信号)

如果联合分布密度函数满足: 任何 k 成立

$$f(x_1, \dots, x_M; n_1, \dots, n_m) = f(x_1, \dots, x_M; n_1+k, \dots, n_m+k)$$

p 阶矩平稳(与时间无关), 一般 $p = 2$

Definition (WSS宽平稳信号)

随机信号满足,

1. $\mu(n) = \mu_x$
2. $\text{var}(x(n)) = \sigma_x^2$
3. $r_x(n_1, n_2) = r(|n_1 - n_2|) = r(k)$, 称为自相关序列。

平稳信号自相关序列

Proposition

- ▶ $r_x(0) = \sigma_x^2 + |\mu_x|^2 \geq r_x(k)$
- ▶ $r_x(k) = r_x^*(-k)$
- ▶ 非负定 $\sum_k \sum_m a_k r(k-m) a_m^* \geq 0$

Remark (其他平稳条件)

- ▶ 渐进平稳: $x(n) \sim x(n+k), k \rightarrow \infty$
- ▶ 增量平稳: $x(n) - x(n+k)$ 平稳;
- ▶ 遍历性: 有限时间的平均统计的极限等于期望值
 $E(x(n)) = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i)$
 $E(x(n)x^*(n-k)) = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i)x^*(i-k)$

典型例子

EXAMPLE

$x(n) = A \cos(w_0 n + \phi) + v(n)$, 其中 A 是正常数, ϕ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布随机变量, $v(n)$ 服从独立的高斯分布 $N(0, \sigma^2)$.

计算有:

$$E(x(n)) = 0$$

$$r(n_1, n_2) = \frac{1}{2} A^2 \cos(w_0(n_1 - n_2)).$$

特别自相关矩阵是 Toeplitz 矩阵!

$$S(w) = \sigma^2 + 2\pi A^2 \sum \delta(w - w_0 - 2\pi k)$$

功率谱

Definition (功率谱密度)

已知平稳信号 $x(n)$ 的自相关序列 $r(k)$, 定义随机过程的功率谱 PSD: $S(e^{i\omega})$ 为 $r(k)$ 的离散时间傅立叶变换。称为功率谱密度。有离散时间傅立叶逆变换可以得到 $r(k)$.

$$Z\text{变换: } S(z) = \sum_n r(k) z^{-k}$$

注记: 一般信号的离散时间傅立叶变换(频率谱)是随机非平稳的白噪声!

Proposition

- ▶ 功率谱密度周期为 2π 的实函数;
- ▶ 非负定 $S(e^{i\omega}) \geq 0$
- ▶ 信号的平均功率: $P(x[n]) = E(x^2[n]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{i\omega}) d\omega$

白噪声: $w(n) \sim WN(\mu, \sigma^2)$
 $r(k) = \sigma^2 \delta(k), S(e^{i\omega}) = \sigma^2.$

LTI系统作用于平稳信号

Theorem (存在性)

给定 $x(n, \xi)$ 是有限期望的平稳随机过程, 通过 BIBO 稳定 LTI 系统 $h[k]$, 得到 $y(n, \xi) = \sum_k h[k] x[n-k; \xi]$ $y(n, \xi)$ 按概率 1 收敛, 且如果 $x(n, \xi)$ 方差有限, 则输出也是方差有限, 且它是平稳随机过程。

LTI 系统的系统响应: 时间域

- ▶ 输出期望 $\mu(y[n]) = \mu(x[n]) H(e^{i0})$
- ▶ 互相关系数 $r_{xy}(k) = h(-k) * r_{xx}(k)$
- ▶ 自相关系数 $r_y(k) = r_h(k) * r_x(k)$,
其中 $r_h(k) = h(n) * h(n-k)$, 为系统的相关序列。特别输出功率 $P_y = r_y(0) = \sum_k r_h(k) r_x(k)$.

LTI 系统的系统响应: 频率域

- ▶ z 变换 $S_y(z) = H(z) H(1/z) S_x(z)$
- ▶ 自功率谱 $S_y(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})|^2 S_x(e^{i\omega})$
- ▶ 自功率谱只能得到系统的幅度响应, 不能得到相位响应。

谱分解定理***

Definition (正则随机信号)

如果平稳随机信号满足Paley-Wiener条件称为正则的;
即 $\int_{-\pi}^{\pi} |\ln S(\omega)| d\omega < \infty$

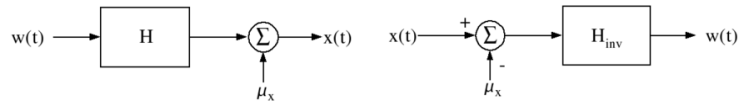
Theorem (谱分解**)

如果平稳随机信号是正则的, 必有分解

$$S(z) = \sigma^2 Q(z) Q^*(1/z^*), \text{ 即 } S(\omega) = |Q(e^{j\omega})|^2 \sigma^2$$

其中 $Q(z)$ 是最小相位系统。

任一平稳信号和白噪音信号可以通过一个可逆最小相位系统互相得到。



ARMA模型

Definition (ARMA方程)

如果平稳随机信号满足

$$x(n) = -\sum_k^p a(k)x(n-k) + \sum_k^q b(k)w(n-k), \text{ 其中 } w(n) \text{ 是白噪音输入; 称为 } ARMA(p,q) \text{ 过程。自回归移动平均模型。}$$

设系统函数 $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

例子:

- ▶ MA模型 即ARMA(0,q)模型, $x(n) = \sum b(k)v(n-k)$, 全零点模型。
正则的平稳随机过程: 清辅音(不用声带振动的语音), 连续的功率谱和
- ▶ AR模型: 即ARMA(p,0)模型, $x(n) = \sum a(k)x(n-k) + w(n)$, 全极点模型。
可预测过程, 元音及含声带振动的辅音, 拟周期性; 离散的功率谱

混合过程

Remark

平稳信号含有连续的功率谱和离散的功率谱(谐波信号), 称为混合信号。

Theorem (Wold分解定理)

任一平稳过程 $x(n)$ 可以写成 $x(n) = x_r(n) + x_p(n)$, 其中 $x_r(n)$ 是正则过程, $x_p(n)$ 是离散谱的可预测过程。且 $E(x_r x_p) = 0$ (正交)。
 $r_x(k) = r_r(k) + r_p(k)$, 可以写成 $x_r(n) = \sum_k b_k v(n-k)$ (MA(∞)过程)。

$$x_p(n) = -\sum_k a(k)x(n-k).$$

Theorem (Kolmogorov定理)

任一ARMA过程可以用无穷阶AR过程表示。

Yule-Walker方程

$$AR(p) \text{ 模型 } \sum_{k=0}^p a_k x(n-k) = w(n)$$

两边同时乘以 $x^*(n-m)$, 取期望

$$E[\sum_k a_k^* x(n-k)x^*(n-m)] = E[w(n)x^*(n-m)]$$

由因果性 $w(n)$ 与 $x(n-m)$ 不相关; $m=0; \sigma_w^2 = \sum a_k r(k)$

$$m > 0; \sum_{k=0}^p a_k^* r(m-k) = 0$$

$R_x \vec{a} = -\vec{r}$ 为Yule-Walker方程。

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_p), \vec{r} = (r^*(1), \dots, r^*(p))$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(p-1) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(p-1) & r^*(p-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(p) \end{pmatrix}$$

模型参数计算

增广方程: $R_{p+1}a_p = \sigma_w^2 u$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(p) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(p) & r^*(p-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

利用 $r(0), \dots, r(p)$ 可以求出 a_p 和 σ_w^2 .

实际中应用观测值估计 R , 求参数。

注意: ARMA, MA 模型对应的求参数方程是非线性的!

矩估计

- ▶ 无偏均值估计: $\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum x(n)$
白噪声过程方差: $\text{Var}(\hat{\mu}_x) = \sigma_x^2 / N$
一般过程: $\text{Var}(\hat{\mu}_x) = \frac{1}{N} \sum (1 - \frac{|k|}{N}) c_x(k)$, c_x 为 x 的协方差函数。
- ▶ 有偏方差估计: $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum (x(k) - \hat{\mu}_x)^2$
白噪声过程方 $E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{N}{N-1} \sigma_x^2$, 渐近无偏。
一般过程: $\text{Var}(\hat{\sigma}_x^2) \approx \frac{c_x^4}{N}$, c_x^4 是 x 的四阶中心矩。
- ▶ 自相关估计
$$\hat{r}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x^*(n-k) & 0 \leq k \leq N-1 \\ \hat{r}_x(-k) & -(N-1) \leq k < 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

渐近无偏; 自相关矩阵是半正定; 方差趋于零(一致估计);

EXAMPLE (简单随机过程)

$x(n) = A + w(n)$, $w(n)$ 是 $\text{WGN}(0, \sigma^2)$ 白噪声。估计 A 。

估计问题

给定数据 $x(0), x(1), \dots, x(n-1)$, 利用随机变量估计确定参数 $\theta := \hat{\theta} = g(x(0), \dots, x(n-1))$ 。

- ▶ 估计器的性能? 与真实值得差距?
- ▶ 是否最优? 怎样找到最优估计?

Definition (估计分类)

- ▶ 估计器的性能:
 - ▶ 无偏估计: $E(\hat{\theta}) = \theta$
 - ▶ 渐进无偏: $n \rightarrow \infty, \lim E(\hat{\theta}) = \theta$
 - ▶ 有偏估计: $b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$
- ▶ 最优准则:
 - 均方误差准则(MSE): $\text{mse}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$
 - 一致估计: $n \rightarrow \infty, \text{mse}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$.

理想估计器: 最小方差无偏估计器(MVU)

线性波形估计: Wiener 滤波器

EXAMPLE

已知信号 $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$, 估计信号 $y(n)$ 。

设 $\hat{y}(n) = H(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 为一个估计信号。

误差信号 $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ 。

特别有线性估计, H 是线性函数。

Remark (最佳估计器)

误差 $e(n)$ 满足一定准则的估计器。

一般正负同样重要, $|e(n)|, |e(n)|^\alpha$ 。

重要: MMSE 最小均方平方误差 $L(n) = E[|e(n)|^2]$ 。

Gauss 19 世纪发展;

Wiener 和 Kolmogorov 最佳滤波; Kalman 等进一步发展;

例子

EXAMPLE (array signals)

阵列信号处理: $x_k(n)$ 是空间信号, $y(n)$ 是某个方向待估计信号。

EXAMPLE (信道均衡)

$y(n) = s(n) + e(n)$, 构造滤波器 $\hat{y}(n) = y(n) * h(n) = s(n)$.

EXAMPLE (linear predictor)

线性预测: $y(n) = x(n)$, 由 $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-k)$ 估计。
向前预测及向后预测。

EXAMPLE (inverse system)

逆系统: LTI系统 $\hat{y}(n) = h(n) * x(n)$, 误差 $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ 。

线性均方误差估计

Definition (LMMSE)

设 $\hat{y}[n] = \sum c_k[n]x_k[n]$, 即 $\hat{Y} = C^T X$,
即 X 是数据向量 x_1, x_2, \dots, x_k , C 是系数向量。

Definition (误差曲面)

误差准则 $P = E(|e|^2) = E(|\hat{y} - y|^2)$,
 $P(C) = E((C^T X - y)^2) = E|y|^2 - C^T d - d^T C + C^T R C$,
其中 $d = E(xy)$, $R = E(xx^T)$, $P(C)$ 称为估计的误差性能曲面。

当 R 正定时有唯一最小解。如果使用有理系统, 误差性能曲面可能非二次曲面。

法方程

Remark (求解过程)

配方法 $P(C) = E|y|^2 - C^T d - d^T C + C^T R C$
 $P(C) = E(y^2) - d^T R^{-1} d + (RC - d)^T R^{-1} (RC - d)$, 如果 R 正定,
取得最小值的充要条件 $RC_0 = d$; $P_{\min} = P_y - d^T C_0$.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{kk} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}; r_{ij} = E(x_i x_j); d_i = E(x_i y)$$

以上称为法方程。

Corollary (正交性)

法方程的解满足: 估计误差 e_0 和 x 正交。 $E(xe_0) = 0$. 特别 $E(\hat{y}e_0) = 0$.

Wiener-Hopf 方程

Remark

最优FIR滤波器: 利用输入信号 $x[n]$ 的样本, 估计期望信号 $y[n]$,
特别有线性估计 $\hat{y}[n] = \sum_{m=1}^M h[n, k]x[n-m] = C^T[n]X[n]$
对应LTI系统, $C[n]$ 与时间无关, 是常数!

Proposition (平稳过程最优FIR滤波器)

记 R 为自相关矩阵 (Toeplitz), $r_k = E(x[n]x[n-k])$, 互相关矢量 $d = [d_i] = (r_{yx}(i))$; 设LTI系统系数 $H[k]$,

Wiener-Hopf方程: $\sum_{k=0}^{k=M} h[k]r(n-k) = r_{yx}(n) = d_n$.

$MMSEP(C_0) = P_y - \sum h[k]r_{yx}(k)$

Remark

一般不用最优IIR滤波器, IIR可以由FIR逼近; FIR的方程是线性方程!

最优线性预测滤波器***

- ▶ 线性预测: 利用信号其他样本(时间)来估计某一时刻的信号值。
前向预测: 令 $y[n] = x[n]$, $x_k[n] = x[n - k]$, $1 \leq k \leq M$,
记 $\hat{y} = x(n|X_{M-1})$,
后向预测:
令 $y[n] = x[n - M]$, $x_k[n] = x[n - M + k]$, $1 \leq k \leq M$,
记 $\hat{y} = x(n - M|X_n)$,
- ▶ 前向预测方程: R 自相关矩阵, $d_k = r_{x_{n-k}y} = r(-k)$;
Wiener-Hopf方程: $Rh_0 = \vec{r}$
MMSE $P_0 = r(0) - d^T h_0$.
- ▶ 后向预测方程: R 自相关矩阵, $d_k = r_{x_{n+1-k}y} = r(M + 1 - k)$;
Wiener-Hopf方程: $Rh_0 = \vec{r}^B$
MMSE $P_0 = r(0) - \vec{r}^B h_0$.

滤波器的设计实现

Remark (设计)

1. 求解法方程。得到系数 C ;
 2. 计算 $MSE P(C)$, 验证满足设计要求;
 3. 计算估计值 \hat{y} ;
- ▶ 法方程求解可用任何算法, 但实用中可用更有效算法;
 - ▶ 阶数固定算法 vs 阶数递归算法
 - ▶ 已知信息是二阶矩; 特别有时不变系统, 二阶矩为常数!

Remark (算法效率)

- ▶ Gauss消去法: $O(M^3)$
- ▶ LDU分解: $O(M^2)$
- ▶ Levinson递归算法: $O(M^2)$ 包含所有低阶估计; 我们记 m 阶估计 \hat{y}_m ; 对应系数 \vec{C}_m , 矩 \vec{d}_m .

Wiener-Hopf 方程和Yule-Walker 方程

- ▶ 前向预测误差滤波器 $e(n) = x(n) - \sum h[k]x[n - k]$
Wiener-Hopf方程: $Rh_0 = \vec{r}$
- ▶ AR(p)模型系数计算 $\sum_{k=0}^p a_k x(n - k) = w(n)$;
 $R_x \vec{a} = -\vec{r}$ 为 Yule-Walker 方程。
- ▶ Wiener-Hopf 方程和 Yule-Walker 方程的一致性。
增广方程: $R_{p+1} a_p = \sigma_w^2 u$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(p) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(p) & r^*(p-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
- ▶ 滤波器算法的实现关键是求解以上方程!

实用滤波器

- ▶ Wiener滤波器是理想滤波器。已知条件: 信号的二阶矩 R 以及信号与目标的相关系数 r_{dx} .
- ▶ 最小二乘滤波器: 宽平稳过程, 已知 $x(n)$, $d(n)$, 估计 R, r_{dx} .
LS滤波器的法方程为 $\hat{R}\vec{C} = \vec{r}_d$, 最小能量 $E = E_y - \vec{r}_d^T C$.
其中 $\hat{R} = \vec{X}^T \vec{X}$, $\vec{r}_d = \vec{X}^T d$.
- ▶ 自适应滤波器: 非宽平稳过程, 已知 $x(n)$, $d(n)$,
时变线性方程 $A_t w_t = D_t$, 能量(最小二乘) $E = |Aw - D|^2$,
一般可用迭代算法计算 $w_{t+1} = w_t - \Delta E$, 比如 Newton 方法。
自适应滤波器是学习过程, 收敛足够快, 从而可改变滤波器系数, 适应不同环境。
- ▶ Kalman滤波器: 非宽平稳过程, 时变线性方程 $D_t = A_t w_t + b$, 且有状态方程 $w_{t+1} = Fw_t + c$, 其中 b, c 是噪音或误差。
一般可用迭代算法: Kalman滤波器算法(比较繁琐, 略去). 与自适应滤波器存在对应。

以上算法的实现依赖于应用线性代数中的基本结果。

应用线性代数的矩阵分解

线性代数基本问题: $Ax = b$ 求解, $Ax = \lambda x$ 求特征根。

快速算法的基础: 矩阵分解

- ▶ $A = LU$: 下三角矩阵和上三角矩阵的乘积;
高斯消去法 $(L, U) = lu(A)$;
- ▶ $A = QR$ 正交矩阵和上三角矩阵的乘积;
Gram-schmidt 正交化;
Household 变换: $H = I - 2uu^T$ 是正交矩阵, 是以 u 为法向量的平面进行反射的矩阵变换。
一般MATLAB $qr(A)$ 用第二种(更稳定);
- ▶ $A = U\Sigma V^T$ SVD分解, U, V 正交矩阵,
设 $rank(A) = r, \Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$
注意: $A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i, A A^T u_i = \sigma_i^2 u_i, \sigma_i$ 称为奇异值。
Matlab: $svd(A), svd(A, 0)$ 。
特别有 $A = \sum u_i \sigma_i v_i^T$, 矩阵由若干向量的乘积完全决定,
称 u_i, v_i 为 Karhunen-Leove 基(特别对称矩阵 $u_i = v_i$)。
可应用于 PCA, 图像压缩等等(但速度慢!)

一般的递推算法

EXAMPLE

设 $Ac = d$, 已知 $A_{old} c_{old} = d_{old}$, 增加新数据 A_{new}, d_{new} (一行)。可以得到 $c_{new} = c_{old} + (A^T A)^{-1} A_{new}^T (d_{new} - A_{new} c_{old})$ 。

- ▶ $A^T = [A_{old}^T \ A_{new}^T], D^T = [d_{old}^T \ d_{new}^T]$
- ▶ 最小二乘解(伪逆); $A^T A c = A^T D, c = (A^T A)^{-1} A^T D$
- ▶ 代入直接求解即可。
- ▶ $(A^T A)^{-1} A_{new}^T$ 称为增益因子(gain factor), 通常记为 K (Kalman), 一般是矩阵! $(d_{new} - A_{new} c_{old})$ 称为更新(innovation)!

简单例子

EXAMPLE

估计一个信号的均值 μ , 已知信号 x_1, x_2, \dots, x_{99} , 可以定义 $\mu = \sum x_i / 99$, 新得到一个样本 x_{100} , 则新估计为 $\mu_{new} = \sum x_i / 100$

- ▶ 线性方程为 $A\mu = X$, 其中 $A = (1, 1, \dots, 1)^T, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。
- ▶ 最小二乘解(伪逆); $A^T A \mu = A^T X, \mu = (A^T A)^{-1} A^T X$
特别这里 $A^T A = 99$. 验证估计是正确的;
- ▶ 希望不直接解方程, 利用 old 解得到新的解
 $\mu_{new} = \mu_{old} * 99/100 + x_{100} * 1/100$
!!! $\mu_{new} = \mu_{old} + 1/100(x_{100} - \mu_{old})$
1/100 称为增益因子(gain factor), $(x_{100} - \mu_{old})$ 称为更新(innovation)!

Kalman 滤波器的简单例子

EXAMPLE

估计一个病人的心跳 u , 已知信号 x_1, x_2 , 可以定义 $u = \sum x_i / 2$, 如果有心跳随时间增加变慢即 $u_2 - u_1 = \alpha$, 应该如何估计?

- ▶ 线性(时变)方程为 $A(u_1 u_2) = X$, 其中 $A = (1, 1)^T, X = (x_1, x_2)^T$ 。
- ▶ 增加有状态方程 $u_2 - u_1 = \alpha$,
- ▶ 组合三个方程, 得到新的线性方程组 $A_* u = X$
最小二乘解(伪逆); $A_*^T A_* u = A_*^T X, u = (A_*^T A_*)^{-1} A_*^T X$
可以直接求解 有 $u_2 = (x_1 + 2x_2 + \alpha) / 3, u_1 = (2x_1 + x_2 - \alpha)$ 。
- ▶ 递推求解: 关键每一步递推包含两步!
状态方程预测: $u_{n+1|n} = F u_{n|n} + \alpha$
校正方程: $u_{n+1|n+1} = u_{n+1|n} + K(x_n - A u_{n+1|n})$
- ▶ 一般 k 非常复杂, 涉及矩阵的逆(参见 Woodbury-Morrison 矩阵逆公式);
- ▶ 时间变化会改变已有估计! 应该还有光滑过程, 即 $u_{n|n+1}$ 会发生变化, 要有新的递推过程。

特例：前向预测误差滤波器

m 阶Wiener-Hopf方程: $R_m \vec{h}_m = \vec{r}_m$

增广方程: $R_{m+1} \vec{a}_m^T = (P_m, \vec{0})^T, \vec{a}_m = (1, \vec{h}_m)^T$.

求解 $m+1$ 阶增广方程

- ▶ 利用 R_{m+2} 的Toeplitz性质有两个分解

$$R_{m+2} = \begin{bmatrix} R_{m+1} & \vec{r}_{m+1} \\ \vec{r}_{m+1}^T & r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \vec{r}_{m+1}^T \\ \vec{r}_{m+1} & R_{m+1} \end{bmatrix}$$

- ▶ 注意到向前, 向后预测 m 阶方程的解是倒序关系:

$$R_{m+1} (\vec{a}_m^B)^T = (\vec{0}, P_m)^T$$

- ▶ 令 $\vec{a}_{m+1} = (\vec{a}_m, 0)^T + k_{m+1} (0, \vec{a}_m^B)^T$

代入 $m+1$ 阶方程,

有 $(P_{m+1}, \vec{0}_m) = (P_m, \vec{0}_{m-1}, \delta_m) + k_{m+1} (\delta_m, \vec{0}_{m-1}, P_m)$ 其

中 $\delta_m = r_{m+1}^B \vec{a}_m$.

仅有两个方程 $P_{m+1} = P_m + k_{m+1} \delta_m, \delta_m = -k_{m+1} P_m$

即 $k_{m+1} = -\delta_m / P_m, P_{m+1} = (1 - k_{m+1})^2 P_m$.

- ▶ 称 k_m 为 m 阶反射系数, δ_m 为偏相关系数。

Levinson-Durbin 算法

m 阶Wiener-Hopf方程: $R_m \vec{h}_m = \vec{r}_m$

增广方程: $R_{m+1} \vec{a}_m^T = (P_m, \vec{0})^T$.

1. 输入 $r(0), r(1), \dots, r(m)$;
2. 初始化: $P_0 = r(0), \delta_0 = r(1), k_0 = -\delta_0 / P_0, a_1 = k_0$
3. m 依次增加; 计算 $P_m = P_{m-1} + \delta_{m-1} k_{m-1}$,
 $\vec{r}_m = (r(1), r(2), \dots, r(M))^T$,
 $\delta_m = r_{m+1}^B \vec{a}_m$,
 $k_m = -\delta_m / P_m$,
 $\vec{a}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_m^B \end{bmatrix} k_m$;
4. 验证 $P_{m+1} = P_m + \delta_m k_m$ 是否满足条件
5. 输出 \vec{a}_m, k_m, P_m .

Levinson算法

解决任一 \vec{d}_m 的情形, 一般称为Levinson算法;

一般的Levinson算法分解为两部分: 一部分递归线性预测 \vec{a}_m

(Levinson-Durbin 算法); 另一部分递归计算最优滤波器(系数);

1. 输入: $\vec{r}_m, \vec{d}_m, P_y$
2. 初始化: $P_0(c) = P_y, \delta_0(c) = d_1, k_0(c) = -\delta_0(c) / P_0(c), c_1 = k_0(c)$
3. Levinson-Durbin 计算: $\vec{a}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_m^B \end{bmatrix} k_m$;
4. 计算系数: $\delta_m(c) = -\vec{c}_m^T \vec{r}_m^B + d_{m+1}, k_m(c) = \delta_m(c) / P_m(c)$
 $\vec{c}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{c}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{c}_m^B \end{bmatrix} k_m(c)$;
5. 验证 $P_{m+1}(c) = P_m(c) + \delta_m(c) k_m(c)$ 是否满足条件
6. 输出 $\vec{c}_m, k_m(c), P_m(c), \vec{a}_m, k_m, P_m$.

一般可以构造特别的格式结构利用Cholesky分解直接实现算法;

$R_m^{-1} = L_m D_m^{-1} L_m^T$, 其中 L_m 由Levinson-Durbin得到的下三角系数 $a_{n, n-j}$ 矩阵, $D_m = \text{diag}(P_1, \dots, P_m)$. 代入可直接解方程!

Schur算法: 直接计算 k_m , 不计算 a_m ;

Beyond Least squares 超越最小二乘法

最小二乘与 L^2 模

- ▶ 最小二乘法是应用最广泛的方法;
- ▶ 应用上对应简单参数大量样本的经典统计模型
方程 $Ac = D$ 是over-determined: 方程数多于未知变量数;
- ▶ L^2 模保证整体误差小, 但可能有小的波动项无法消除;

稀疏压缩与 L^1 模

- ▶ 现代生物信息, 图像, 基因表示等领域发展很快;
- ▶ 应用上对应与样本复杂(参数多)但样本个数少的高维统计问题;
方程 $Ac = D$ 是under-determined: 方程数远少于未知变量数;
希望用到的未知变量个数越少越好 L^0 模。稀疏表示!!!
- ▶ L^1 模是 L^0 模的逼近, 统计意义上证明 L^1 最小的解对应与 L^0 上的最小解;
研究还在继续!

EXERCISE ONE

作业4/11课堂交。上机作业交电子版4/11前到邮箱。带***题选做。

1. 记 $L^2(\mathbb{R})$ 为复平方可积函数($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$), 定义复内积并验证其是一个Hilbert空间。
2. 计算周期为2的奇方波的傅立叶级数;
3. 给定微分方程 $u'' + a^2u = f(t)$, 已知当 $f(t) = \delta(t)$ 时, 得到基本解 $G(t) = e^{-a|t|}/(2a)$. 证明: 给定任意函数 $f(t)$ 的解为 $G(t) * f(t)$.
注: 利用傅立叶变换。
4. 写出高斯函数表达式, 说明其属于Schwartz空间, 计算其傅立叶变换。
5. 证明: 傅立叶变换的对偶性: 即 $F = \widehat{f}, \widehat{F} = 2\pi f(-t)$ 。计算 $\frac{\sin x}{x}$ 的傅立叶变换。
6. 证明: (1) 如果单位响应信号满足 $h(t) = 0, t \leq 0$ (称为因果信号), 则系统是因果系统。
(2) 如果单位响应信号满足 $\int |h(t)| < \infty$, 则系统是BIBO稳定系统。(输入有界, 输出有界)。
7. *** 验证: 指数函数 e^{ist} 是任一卷积算子和平移的特征向量。
即任意 $h(t) * e^{ist} = \lambda(s)e^{ist}, T_s(e^{ist}) = \lambda(s)e^{ist}$, 其中 s 为固定参数, t 为变量。

上机作业MATLAB

要求提交的M文件可直接执行得到相关图表, 并有相关结果的说明。

1. (信号的生成与变换)
 - A: 试生成以下信号的一个4096个样本的序列(1)周期为2的方波(2)Matlab的Sinc函数。
 - B: 计算序列的傅立叶变换。画出其图形及其频谱(可用fft)。
 - C: 计算(1)和(2)的卷积, 画出图形和频谱。并验证时域的卷积公式。
 - D: 上交程序(.m)及C中的图形(.fig 或.jpg)。
2. (真实信号的频谱分析)
 - A: 学习MATLAB demo: xpsound.m, 学习信号的功率谱密度(PSD)和谱图(Spectrogram)的定义, 观察其峰值或亮区域与信号的关系。
 - B: 自己录入声音生成WAV文件或找到一个wav文件; (请使用较短的时间序列), 读入信号 $x(n)$;
 - C: 给出信号的功率谱密度(PSD)和谱图(利用函数 periodogram(x), spectrogram(x))。
 - D: 上交wav文件及C中图形, 说明信号与图的关系;

3. (模拟信号降噪)

A:构造一序列带噪音信号(可用2中信号加上随机噪音rand函数);

B:构造阶数为 $k = 3$ (或更高)的均值滤波器及中位数滤波器 $y(n) = \text{mean}(x(n), x(n-1), x(n-2))$, $y(n) = \text{median}(x(n), x(n-1), x(n-2))$ 并滤波以上信号。

C:画图给出所有信号和谱密度图, 说明降噪效果(可用sound函数听), 比较说明两个滤波器的不同。

D:上交原程序及C中图形。

E:(***) 试用一个真实图像实现以上步骤, 说明中位数滤波器更好保持边缘信息。注意: 滤波器是二维矩阵。可用imfilter 或filter2函数。

EXERCISE TWO

作业5/9课堂交。上机作业交电子版5/9前到邮箱。带***题选做。

1. (Dirac comb) 定义 $\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, 则 Dirac comb 是离散的周期序列, 证明其傅立叶展开为 $\Delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum e^{nWt}$, 进一步其傅立叶变换 $\widehat{\Delta_T(t)} = W\Delta_W(w)$, 其中 $W = 2\pi/T$.
2. 计算 $x(n) = \cos nw, n \geq 0$ 的单边Laplace变换(n 看成实数), z 变换和离散时间傅立叶变换(DTFT), 说明其收敛域。
计算 $X(z) = \frac{z}{z^2 + w^2}$ 的逆 z 变换 $x(n)$.
3. 给定一阶系统 $H(z) = \frac{z}{z-K}$, K 是常数。给出其对应的差分方程(滤波器时域表示). 分别对 $K = 0, 0.5, 1$ 的情形分析其频率响应, 说明滤波器类型(低通, 高通, FIR, IIR)。
4. 给定滤波器 $y(n) + 5y(n-2) = x(n) + 3x(n-1) + 2x(n-2)$.
a: 给出系统的传递函数 $H(z)$, 求出其冲激响应 $h(n)$.
b: 给出 $h(n)$ 的ROC, 系统的零点和极点, 并判断系统的因果性, 稳定性。
5. 证明: (1) 如果离散LTI系统是BIBO稳定的, 则其传递函数的收敛域(ROC)包含单位圆。***反之也成立。
(2) 如果有理传递函数的离散LTI系统是BIBO稳定, 则其所有极点都在单位圆内(ROC包含 $|z| \geq 1$). ***反之也成立。
6. (双线性变换) 定义 $s = \frac{z-1}{z+1}$, 证明 s 域中的频率 w 和 z 域中频率 w' 的关系 $w = \tan(w'/2)$.

上机作业MATLAB

要求提交的M文件可直接执行得到相关图表, 并有相关结果的说明。

1. (模拟演示时域的抽样定理)
 - A: 构造一个频率有限的信号(可取若干个正弦信号的和, Sa函数或自选声音文件)
 - B: 构造合适抽样频率的抽样信号。给出对应信号的频谱, 并画图比较。
 - C: 尝试从抽样信号恢复原信号(可以filter)
 - D: 上交原程序及B中图形。
 - E: (***)尝试对一个真实图像进行抽样和恢复, 比较恢复前后图像的差异。
2. (z 变换) 验证上面第四题作业的结果。利用residue()求出 $h(n)$, 利用zplane()画出零点和极点, 利用impz()画出频率响应。上交程序(.m)及图形(.jpg)。

3. (FIR滤波器设计)设计一个低通滤波器其指标是: 通带截止频率 $f_p = 800Hz$,阻带截止频率 $f_s = 1000Hz$, 抽样频率 $f = 4000Hz$,通带波纹 $\alpha_p = 0.5dB$,最小阻带衰减 $\alpha_s = 40dB$.

(注:可计算有 $\delta_p = 0.0559$, $\delta_s = 0.01$, $w_p = 0.4\pi$, $w_s = 0.5\pi$.)

A: 利用MATLAB函数设计等波纹滤波器: `firpm()`; 画出频率响应图(.fig 或.jpg)

B: 利用MATLAB函数设计最小二乘滤波器: `firls()`;画出频率响应图(.fig 或.jpg)

C: 利用MATLAB函数设计基于窗函数的FIR滤波器。阶估计`kaiserord()`, 可用窗函数 `blackman()`,`hamming()`,`kaiser()`,`chebwin()`; 滤波器: `fir1()`;画出频率响应图(.fig 或.jpg)

D: 上交原程序及所有图形,比较三种方法的差异。

EXERCISE THREE

作业5/23课堂交。上机作业交电子版5/23前到邮箱。带***题选做。

1. 给出离散傅立叶变换的逆矩阵 F_N ,证明其可用离散傅立叶变换 D_N 计算。
 - (1) $F_N(\vec{x}(n)) = D_N \cdot \vec{x}(N - n)/N$, $\vec{x}(N - n)$ 是输入信号的逆排列;
 - (2) $F_N(\vec{x}) = (D_N \cdot \vec{x}^*)^*/N$, 其中*是复共轭;
 - (3) $F_N(\vec{x}) = \text{swap}(D_N \cdot \text{swap}(\vec{x}))/N$, 其中 $\text{swap}(a + bi) = b + ai$, 即交换虚部和实部。
2. (1) 给定信号 $x(n)$, 连续做四次DFT后的结果是什么? 考察 D_N^4 .
 (2) (**)试给出 D_{16} 的基为4的一步矩阵分解(即一步基为4的FFT算法).
3. (1) 证明: 傅立叶变换矩阵的行向量 $c_k = \{W_N^{kj}, j = 0, 1, \dots, N - 1\}$ 是所有 N 阶循环矩阵的特征向量, 其中 $W_N = e^{-i2\pi/N}$, 计算行向量的长度。
 (2) 给定以下二阶差分矩阵 A_2 , 证明DCT2的所有行向量 $c_k = \{\cos(j + 1/2)k\pi/N, j = 0, 1, \dots, N - 1\}$ 是其特征向量并计算行向量的长度。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
4. 证明:DCT4的所有行向量 $c_k = \{\cos(j+1/2)(k+1/2)\pi/N, j = 0, 1, \dots, N - 1\}$ 是以上矩阵 A_4 的特征向量。给出 A_4 的第一行和最后一行的计算方法。(给出对应的边界条件并计算).
5. 利用z变换给出再抽样运算的频率响应。 $(\uparrow 2)(\downarrow 2)(e^{iw}) = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{i(w+\pi)})$
 及 $(\downarrow 2)(\uparrow 2)(e^{iw}) = e^{iw}$.
6. 验证hat函数(三角波)是尺度方程 $\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^L h_0(k)\phi(2t - k)$ 的解。其中 $h_0 = (1/4, 1/2, 1/4)$. ***说明:一般的B样条函数都是其解。
7. 给定Daubechies乘积滤波器 $P_0(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6})$ 。
 - (1) 验证其满足PR条件(完全重构), 求出其六个零点。
 - (2) 试给出一个4/4滤波器组的 h_0, f_0 表达式; (Daubechies小波)
 - (3) 试给出一个6/2滤波器组的 h_0, f_0 表达式;
 - (4) 试给出一个5/3滤波器组的 h_0, f_0 表达式;

上机作业MATLAB

要求每题提交一个M文件(可直接执行)和一个所有结果的说明文件。

1. (FFT和卷积)

A:自己编写一个实现 $N = 2^k$ 序列FFT算法的程序。并构造 $N = 4096$ 或更长的序列,与MATLAB的FFT比较运行时间(MATLAB时间函数)。

B:自己编写两个相同长度序列的循环卷积程序。构造或利用第一次作业的数据进行卷积计算。并与利用MATLAB *fft, ifft*实现循环卷积的方法比较运行时间。为什么MATLAB没有循环卷积函数?

C:学习用MATLAB debug发现以上两个程序的主要运算瓶颈(花费时间最多代码),比较运行时间并尝试改进。

D:(***) 试用FFT变换真实图像,然后选取一部分傅立叶系数(一个小矩阵或大的数值?),再用ifft变换看图像是什么。如何选取子矩阵?

2. (DCT2变换)

A:给出 $N = 8$ 的DCT2的 8×8 矩阵的八个基向量(行向量),画出其基向量以及其傅立叶变换向量。

B:试验DCT压缩。选取一个 256×256 或合适大小图像,利用MATLAB的DCT2函数变换,适当压缩系数,再用IDCT2恢复,比较图像差异。

注记:可以选取左上角的方阵,其余元素变零。或者保留较大系数,将较小系数置零。

C(***)试验JPEG压缩。选取一个 256×256 或合适大小图像,分割图像成为 8×8 的小块,每块进行DCT2变换,请适当压缩每一个 8×8 子矩阵,再用IDCT2恢复,比较图像。

注记:标准jpg压缩将改变图像灰度范围到比如 $[-128, 127]$,除以标准压缩矩阵改变每个 8×8 子矩阵,结果取整,再取逆,请参考相关文献。

3. (小波函数)利用附件中cascade.m函数计算以下小波的尺度函数。

A:直接给出Daubechies小波的尺度函数。

B:利用习题中结果,给出 $5/3, 6/2$ 小波的尺度函数。

C:取 $h = (1/4, 1/2, 1/4), h = (2/3, 1/3)$,给出结果。

4. (小波变换)参考附件中D4.m函数编写一个小波变换。

A:自己编写一个实现 $5/3$ 滤波器组的一个小波变换(不迭代)及其逆变换。可以采用周期的边界条件(即选取变换矩阵为循环矩阵)。给出一个测试信号的变换及逆变换结果(比如sinc信号)。

注记:如果编程困难,可以直接用D4.m中的 $4/4$ 滤波器组变换。

B:使用A中函数,编程实现迭代的小波变换及逆变换。(迭代参数可选,一般3-5即可)。给出一个例子。

C:(信号压缩)选取一个信号(比如sinc信号),选取合适的方法压缩B中变换后系数(某些置零),并逆变换恢复,比较不同。

D:(信号去噪)给信号加上随机噪音,使用经典小波硬降噪方法(确定一个阈值 δ ,小波系数比 δ 小则置零)。比较降噪效果。

E:(***)(图像压缩降噪)试用MATLAB小波工具箱中函数对真实图像进行变换,压缩或降噪,恢复,比较图像。

EXERCISE FOUR

作业6/10交信箱。上机作业交电子版6/10前到邮箱。带***题选做。

1. 设随机信号 $x[n] = A \cos(\omega n + \phi)$, 其中 ϕ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量, A 是均值为零, 方差为 σ^2 的正态分布。
 - (a) 求 $x[n]$ 的均值, 方差;
 - (b) 计算其自相关系数, 说明它是平稳信号。
 - (c) 计算其频率谱和功率谱。
2. 证明LTI系统的输入和输出的自相关系数公式: $r_y(k) = r_h(k) * r_x(k)$, 其中 $r_h(k) = h(n) * h^*(n-k)$, 为系统的相关序列。
***矩阵表示: $Y = HX$, 则 $E(YY^T) = HE(XX^T)H^T$.
3. 证明: Household 变换: $H = I - 2uu^T$ 是正交矩阵, 说明其是以 u 为法向量的平面进行反射的矩阵变换。
4. 证明以下矩阵逆的公式: 设 M, A, W 是 $n \times n$ 矩阵, U, V 是维数为 $n \times m, m \times n$ 的矩阵, u, v 是 $n \times 1, 1 \times n$ 的向量。 I 是恒同矩阵。
 - (a) $M = I - uv, M^{-1} = I + uv/(1 - vu)$
 - (b) $M = I - UV, M^{-1} = I_n + U(I_m - VU)^{-1}V$
 - (c) *** $M = A - UW^{-1}V, M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$
Woodbury-Morrison 公式。

上机作业MATLAB

要求每题提交一个M文件(可直接执行)和一个所有结果的说明文件。

1. (统计信号处理)
 - A: 学习MATLABdemo:lpcardemo.m, 试给你选择的语音文件建立一个AR模型, 比较模型和真实数据的差异(耳朵听和谱比较)
 - B: 自己构造MA模型和生成白噪声, 调试不同的模型, 产生有意义的声音!
 - c: (***) 学习MATLABdemo:ipexwiener.m, 试给你选择的图像进行Wiener去噪, 说明差异。
2. (矩阵分解)
 - A: 随机产生矩阵 $A_{256 \times 256}$.
 - B: 利用MATLAB函数计算A的LU分解, QR分解, SVD分解。比较计算速度。
 - C: *** 试用一个图像作为矩阵, 求出SVD分解, 压缩若干奇异值 ($\sigma_i < h, \rightarrow \sigma_i = 0$), 恢复图像, 比较压缩效果!